ACTA
ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS
NOVA SERIES TOM. XXVI.

AZ ESZTERHÁZY KÁROLY TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

REDIGIT—SZERKESZTI
ORBÁN SÁNDOR, V. RAISZ RÓZSA

SECTIO MATHEMATICAE

TANULMÁNYOK A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL

REDIGIT—SZERKESZTI
KISS PÉTER, MÁTYÁS FERENC

EGER, 1999

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 3–8*

PERFECT NUMBERS CONCERNING FIBONACCI SEQUENCE

Bui Minh Phong (ELTE, Hungary)

Abstract: We proved that there are no perfect numbers in the set

$$\left\{ \frac{F_{nm}}{F_m} | n, m \in I\!N \right\},$$

where $F = \{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ is the Fibonacci sequence.

1. Results and auxiliary lemmas

Let $I\!N$ and $\mathcal{P}$ denote the set of all positive integers and the set of all prime numbers, respectively. (m, n) denotes the greatest common divisor of the integers m and n. The notation $m \parallel n$ means that m is a unitary divisor of n, i.e. that $m|n$ and $(\frac{n}{m}, m) = 1$.

A positive integer N is called perfect if it is equal to the sum of all its proper divisors, i.e., if $\sigma(N) = 2N$, where $\sigma(N)$ denotes the sum of all positive divisors of N. Such integers were considered already by Euclid, who proved that i f the number $1 + 2 + \cdots + 2^n$ happens to be a prime then its product by 2^n is perfect. Euler was the first to prove that Euclid's method gives all even perfect numbers:

Euler's Theorem. *If N is an even perfect number, then it can be written in the form $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$, where p and $2^p - 1$ are both primes. Conversely, if p and $2^p - 1$ are prime numbers, then the product $2^{p-1}(2^p - 1)$ is perfect.*

For odd perfect numbers the situation is much worse since it is not known whether such numbers exist at all. This question forms one of the oldest problems in number theory. It is well-known that every odd perfect number is of the form $p^a x^2$, where p is a prime and $p \equiv a \equiv 1 \pmod 4$, furthermore all prime divisors of x is congruent to $-1 \pmod 4$.

Let $F = \{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ be the Fibonacci sequence defined by $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{for all integers} \quad n \geq 2.$$

Research supported by the Hungarian OTKA Foundation, No. T 020295 and 2153.

We denote the Lucas sequence by $L = \{L_n\}_{n=0}^{\infty}$, which is given by $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ and by the relation $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ for all integers $n \geq 2$.

Recently, F. Luca [3] proved that there are no perfect Fibocacci or Lucas numbers. Our purpose in this note is to improve this result by proving the following

Theorem. *Let*

$$\mathcal{F} := \left\{ \frac{F_{nm}}{F_m} \;\middle|\; n,\ m \in I\!N \right\}.$$

Then there are no perfect numbers in the set $\mathcal{F}$.

We note that all numbers of the set $\mathcal{F}$ are positive integers, furthermore $F_n \in \mathcal{F}$ and $L_n \in \mathcal{F}$ for all $n \in I\!N$. Thus, there are no perfect Fibocacci or Lucas numbers. The following 51 numbers belong to $\mathcal{F}$ which are ≤ 10000:

1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 17, 18, 21, 29, 34, 47, 48, 55, 72, 76, 89, 122, 123, 144, 199, 233, 305, 322, 323, 329, 377, 521, 610, 842, 843, 987, 1292, 1353, 1364, 1597, 2207, 2208, 2255, 2584, 3571, 4181, 5473, 5777, 5778, 5796, 6765, 9349.

Our proof will make use of the Ribenboim's result about the square-classes of the Fibonacci and Lucas sequences. For a sequence $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ we say that the terms X_n and X_m are square equivalent if there exist non-zero integers u and v such that

$$u^2 X_n = v^2 X_m$$

or equivalently

$$X_n X_m = t^2 \quad \text{with a suitable non-zero integer} \quad t.$$

The equivalent classes are called square-classes of X. A square-class is say trivial if it contains only one element.

Lemma 1. ([4]) *The square-class of a Fibonacci number F_k is trivial, if $k \neq 1, 2, 3, 6$ or 12 and the square-class of a Lucas number L_k is trivial, if $k \neq 0, 1, 3$ or 6.*

It is known that for each positive integer M there exists the smallest postive integer $f = f(M)$ such that $F_f \equiv 0 \pmod{M}$. This number $f = f(M)$ is called the rank of apparition of M in the Fibonacci sequence F.

We shall recall some properties of the Fibonacci sequence, which will be used at the proofs of our theorems.

Lemma 2. *We have*

(a) $\quad F_k \equiv 0 \pmod{M}$ *if and only if* $f(M) \mid k \quad (k,\ M \in I\!N)$,

(b) $\quad (F_i,\ F_j) = F_{(i,\ j)}$ *for all* $i,\ j \in I\!N$,

(c) $\quad f(p) \mid p - (5/p)$ *for all odd primes* p,
where $(5/p)$ *is the Legendre symbol with* $(5/5) = 0$,

(d) $\quad f(p) \mid \frac{p-(5/p)}{2}$ *if and only if* $p \equiv 1 \pmod{4}$,

(e) $\quad p^{e+w} \parallel F_{mtp^w}$ *if* $p \in \mathcal{P}$ *and* $e,\ w,\ m,\ t \in I\!N$ *with* $p^e \parallel F_m,\ p \not| t$,

(f) $$f(2^e) = \begin{cases} 3, & \textit{if } e = 1 \\ 6, & \textit{if } e = 2 \\ 3 \cdot 2^{e-2}, & \textit{if } e \geq 3. \end{cases}$$

Proof . The proof of Lemma 2 may be found in [1], [2], [5], [6].

2. The proof of the theorem

The proof of our theorem follows from following Lemma 3–4.

Lemma 3. *There are no even perfect numbers in the set $\mathcal{F}$.*

Proof. Assume that there is an even perfect number N in the set $\mathcal{F}$. Then by Euler's Theorem, we have

$$N = \frac{F_{nm}}{F_m} = 2^{p-1}(2^p - 1), \tag{1}$$

for some positive integers $n \geq 2$ and m, where both p and $2^p - 1$ are primes.

Let

$$\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

It is clear to check that

$$\alpha^{k-1} \geq F_k \geq \alpha^{k-2} \quad \text{for all} \quad k \in I\!N,$$

consequently

$$\frac{F_{nm}}{F_m} = 2^{p-1}(2^p - 1) \geq \alpha^{(n-1)m-1}. \tag{2}$$

It is obvious from (1) that $2^{p-1}(2^p - 1)$ is the divisor of F_{nm}, therefore Lemma 2(a) implies

$$f\left(2^{p-1}(2^p-1)\right) \ |nm \ \text{ and } \ nm \geq \ f\left(2^{p-1}(2^p-1)\right). \tag{3}$$

Since $2^{2p-1} > 2^{p-1}(2^p - 1)$, we deduce from (2) and (3) that

$$(2p-1)\frac{\log 2}{\log \alpha} > (n-1)m - 1 = nm - m - 1 \geq f\left(2^{p-1}(2^p-1)\right) - m - 1,$$

and so

$$m > f\left(2^{p-1}(2^p-1)\right) - (2p-1)\frac{\log 2}{\log \alpha} - 1.$$

Hence, in view of $n \geq 2$ we have

$$(2p-1)\frac{\log 2}{\log \alpha} > (n-1)m - 1 \geq m - 1 > f\left(2^{p-1}(2^p-1)\right) - (2p-1)\frac{\log 2}{\log \alpha} - 2,$$

and so

$$2(2p-1)\frac{\log 2}{\log \alpha} + 2 > f\left(2^{p-1}(2^p-1)\right). \tag{4}$$

It is clear to check that

$$f\left(2^{p-1}(2^p-1)\right) = \begin{cases} 12, & \text{if } p=2 \\ 24, & \text{if } p=3 \\ 60, & \text{if } p=5 \end{cases},$$

which with (4) shows that $p \geq 7$, because

$$2(2p-1)\frac{\log 2}{\log \alpha} + 2 < \begin{cases} 12, & \text{if } p=2 \\ 24, & \text{if } p=3 \\ 60, & \text{if } p=5 \end{cases}.$$

Thus we have proved that (1) implies $p \geq 7$.

Assume that (1) is satisfied for a suitable prime $p \geq 7$ and positive integers $n,\ m$. Then from Lemma 2 (f) we get

$$f\left(2^{p-1}(2^p-1)\right) \geq f(2^{p-1}) = 3 \cdot 2^{p-3},$$

which together with (4) leads to

$$2(2p-1)\frac{\log 2}{\log \alpha} + 2 > 3 \cdot 2^{p-3}.$$

This inequality is impossible for all prime $p \geq 7$, thus Lemma 3 is proved.

Lemma 4. *There are no odd perfect numbers in the set $\mathcal{F}$.*

Proof. Assume that there exists an odd perfect number N in the set $\mathcal{F}$. Then

$$N = \frac{F_{nm}}{F_m} \quad \text{for some positive integers} \quad n \geq 2,\ m.$$

It well-known that in this case we can write N as in the form

$$N = \frac{F_{nm}}{F_m} = p^a (q_1^{a_1} \cdots q_s^{a_s})^2 \tag{5}$$

with distinct primes $p,\ q_1,\dots,q_s$ and positive integers $a,\ a_1,\dots,a_s$, furthermore

$$p\equiv a\equiv 1 \pmod 4 \quad\text{and}\quad q_1\equiv\cdots\equiv q_s\equiv -1 \pmod 4. \tag{6}$$

First we prove that

$$(nm,2)=1. \tag{7}$$

Assume that n is even. Then

$$N=\frac{F_{nm}}{F_m}=\frac{F_{\frac{n}{2}m}}{F_m}\cdot L_{\frac{n}{2}m}=p^a(q_1^{a_1}\cdots q_s^{a_s})^2.$$

By using the fact

$$(F_k,\ L_k)=\begin{cases}2, & \text{if } 3|k\\ 1, & \text{if } (3,k)=1,\end{cases} \tag{8}$$

we have $(F_{\frac{n}{2}m},\ L_{\frac{n}{2}m})=1$. Thus, the last relation shows that one of the numbers $\frac{F_{\frac{n}{2}m}}{F_m},\ L_{\frac{n}{2}m}$ is a square. This, using Lemma 1, implies that

$$\frac{n}{2}m\in\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 12\}. \tag{9}$$

Thus, we have

$$nm\in\{2,\ 4,\ 6,\ 12,\ 24\} \quad\text{and}\quad F_{nm}\in\{1,\ 3,\ 2^3,\ 2^4\cdot 3^2,\ 2^5\cdot 3^2\cdot 7\cdot 23\}. \tag{10}$$

Since N is an odd divisor of F_{nm}, one can check from (10) that any odd divisor of F_{nm} is not a perfect number.

Now assume that n is odd and m is even. Then

$$\frac{F_{nm}}{F_m}=\frac{F_{n\frac{m}{2}}}{F_{\frac{m}{2}}}\cdot\frac{L_{n\frac{m}{2}}}{L_{\frac{m}{2}}}$$

and

$$\left(\frac{F_{n\frac{m}{2}}}{F_{\frac{m}{2}}},\ \frac{L_{n\frac{m}{2}}}{L_{\frac{m}{2}}}\right)=1.$$

Thus, we infer from (5) that one of the numbers $\frac{F_{n\frac{m}{2}}}{F_{\frac{m}{2}}},\ \frac{L_{n\frac{m}{2}}}{L_{\frac{m}{2}}}$ is a square. This, using Lemma 1, implies that (9) and (10) are satisfied. As we shown above, these are impossible.

Thus, we have proved that nm is odd.

Now we complete the proof of Lemma 4.

If $s \geq 1$, then we infer from (5), (7) and Lemma 2(a) that

$$f(q_1) \mid nm, \quad \text{i.e.} \quad f(q_1) \quad \text{is odd.}$$

This implies that

$$f(q_1) \mid \frac{q_1 - (\frac{5}{q_1})}{2}.$$

From Lemma 2(d), we have $q_1 \equiv 1 \pmod 4$, but this contradicts to (6). Thus we have proved that the odd perfect number N has the form $N = \frac{F_{nm}}{F_m} = p^a$, with a prime p and a positive integer a. In this case, we have

$$2 = \frac{\sigma(N)}{N} = 1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^a} < \frac{p}{p-1},$$

which gives $p < 2$. This is impossible.

The proof of Lemma 4 is complete and the theorem is proved.

References

[1] P. Bundschuh and J. S. Shiue, Generalization of a paper by D. D. Wall, *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* Ser II **56** (1974), 135–144.

[2] D. H. Lehmer, An extended theory of Lucas' function, *Ann. of Math.* **31** (1930), 419–448.

[3] F. Luca, Perfect Fibonacci and Lucas numbers, submitted.

[4] P. Ribenboim, Square classes of Fibonacci and Lucas sequences, *Portugaliae Math.*, **48** (1991), 469–473.

[5] P. Ribenboim, The book of prime number records, Springer Verlag, New York-Berlin, 1991.

[6] O. Wyler, On second order recurrences, *Amer. Math. Monthly* **72** (1965), 500–506.

B. M. Phong
Department of Computer Algebra
Eötvös Loránd University
Pázmány Péter sét. 1/D
H-1117 Budapest, Hungary
E-mail: bui@compalg.inf.elte.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 9–12*

ON A PROBLEM CONNECTED WITH MATRICES OVER Z_3

Aleksander Grytczuk (Zielona Góra, Poland)

Abstract: In this note we give an explicit form of the matrix $A = (a_{ij})_{n\times n}$ with elements $a_{ij} \in Z_3$, which satisfy all conditions of some problem posed by Stewart M. Venit (see [3], p. 476 — Unsolved Problems). Moreover, we prove that if $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ are the characteristic roots of this matrix then for every prime number p the following congruence is true $\alpha_1^p + \alpha_2^p + \dots + \alpha_n^p \equiv 2n - 1 \pmod p$.

1. Introduction

In [3] (p. 476 — Unsolved Problems — TYCMJ 186 — by Stewart M. Venit) one can find the following problem: For each positive integer n show that there is one and only one $n \times n$ matrix A satisfying the following conditions:

(C1) all entries of A are in the set $\{0, 1, 2\}$

(C2) the submatrix consisting of the first k rows and k columns of A has determinant equal to k for $k = 1, 2, \dots, n$.

(C3) all entries of A not on the main diagonal or not on the diagonals directly above or below are zero.

In the present note we prove that the matrix $A_n\,(a_{ij})_{n\times n}$, where $a_{ij} \in Z_3 = \{0, 1, 2\}$ and $a_{12} = a_{21} = 0$ given by

$$a_{ij} = a_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j = 1 \text{ or } |i - j| = 1 \text{ for } \max(i, j) \geq 3 \\ 2, & \text{if } i = j \geq 2 \\ 0, & \text{in the other cases and if } (i, j) = (1, 2) \end{cases} \tag{1}$$

satisfies the conditions (C1)–(C3) and is determined uniquely.

2. Results

First, we prove the following

Theorem 1. *For each positive integer $n \geq 2$ there is exactly one of the matrix $A_n = (a_{ij})_{n\times n}$ with elements over Z_3 such that the conditions (C1)–(C3) are satisfied. The matrix A_n given by (1) has the following form:*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{2}$$

Proof of Theorem 1. It is easy to see that for $n = 2$ the matrix A_2 satifying the conditions (C1)–(C3) is the form

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

and we see that the matrix A_2 is determined uniquely. For $n = 3$ we obtain that the matrix A_3 has the following form

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

We note that the matrix A_3 is determined uniquely and the conditions (C1)–(C3) are satisfied. Further, we shall prove Theorem 1 by induction with respect to n. Suppose that $m \geq 3$ and the matrices A_n for $n \leq m$ has the form (2) and are determined uniquely. By inductive assumption it follows that the matrix A_{m+1} has the following form

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & z \end{pmatrix}_{(m+1)\times(m+1)} \tag{3}$$

where $x, y, z \in Z_3 = \{0, 1, 2\}$. Suppose that in (3) we have $x = y = 1$ and $z = 2$. Using Laplace's theorem to the first row of the matrix A_{m+1} we obtain

$$\det A_{m+1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{m\times m}$$

On the other hand it is well-known (see [2], p. 39) that

$$\det A_{m+1} = m + 1. \tag{4}$$

By (4) and the inductive assumption it follows that the matrix A_{m+1} satisfies the conditions (C1)–(C3), if $x = y = 1$ and $z = 2$. Now, we can assume that the elements $x, y, z \in Z_3$ take different values than $x = y = 1$ and $z = 2$. Using Laplace's theorem to (3) with respect to the last row and by the inductive assumption we obtain

$$\det A_{m+1} = mz - xy\,(m-1)\,. \tag{5}$$

Consequently, we can consider the following equation generated by (5)

$$mz - xy\,(m-1) = m + 1 \tag{6}$$

where $x, y, z \in Z_3 = \{0, 1, 2\}$. Analyzing (6) we obtain, that this equation has exactly one solution in elements $x, y, z \in Z_3$, namely $x = y = 1$ and $z = 2$. Therefore the matrix A_{m+1} is determined uniquely. Hence the inductive proof is complete.

Now, we prove the following theorem:

Theorem 2. *Let A_n be the matrix defined by (1) and let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ be the characteristic roots of A_n. Then for every prime number p, the following congruence*

$$\alpha_1^p + \alpha_2^p + \cdots + \alpha_n^p \equiv 2n - 1 \pmod{p} \tag{7}$$

holds.

Proof of Theorem 2. It is well-known that if $f \in Z\,[x]$ and $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are the roots of f, then

$$S_{jp} \equiv S_j \pmod{p} \tag{8}$$

for $j = 1, 2 \ldots$ and every prime number p, where

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k.$$

The congruence (8) has been noticed without proof by E. Lucas in 1878. The proof of (8) one can find, for example in [1]. Substituting $j = 1$ in (8) and remarked that

$$S_1 = Tr A_n = 2n - 1$$

we obtain, that

$$S_p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \cdots + \alpha_n^p \equiv S_1 = 2n - 1 \pmod{p}$$

and the proof of the Theorem 2 is complete.

Substituting $n = p$ in (7), where p is a prime number we obtain the following

Corollary. *Let p be the a prime number and let $\alpha_j \quad j = 1, 2, \ldots, p$ be the characteristic roots of the matrix A_p given by (1), then*

$$\alpha_1^p + \alpha_2^p + \cdots + \alpha_p^p \equiv -1 \pmod{p}.$$

I would like to thank Professor Peter Kiss for his valuable remarks and comments for the improvement of the exposition of this paper.

References

[1] Dobrowolski, E., On the maximal modulus of conjugates of an algebraic integer, *Bull. Acad. Polon. Sci.* Vol. 26. No. 4 (1978), pp. 291–292.

[2] Kostrikin, A. I., Collection of problems of algebra, PWN Warszawa, 1995. (in Polish)

[3] Rabinowitz, S., Index to Mathematical Problems 1980–1984, Westford, Massachusetts, 1992.

Aleksander Grytczuk
Institute of Mathematics
T. Kotarbiński Pedagogical University
65-069 Zielona Góra, Poland
E-mail: agryt@lord.wsp.zgora.pl

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 13–18*

STUDYING AND IMPROVING LINEAR MAPPINGS BY ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

Emőd Kovács (EKTF, Hungary)

Abstract: The aim of this paper is to evaluate the effectiveness of artificial neural networks studying linear mappings and, on the other hand,improve deformed linear mappings given by wrong pairs of points. In this latter case the artificial neural network is applied to give the best fitting linear mapping of the given set of data.

1. Introduction

Artificial neural networks or simply neural nets are widely used in computer graphics e.g. in surface reconstruction from insufficient or scattered data [4]–[7]. Generally neural nets is a useful tool for handling any kind of data which have deformity or deficiency from a certain point of view. The main feature of the neural nets is the ability of studying, which means that the given data can improve the structure of the net. Neural nets can be classified by the type of input data or the method of studying [2]. In this paper the well-known back-propagation algorithm is used, which will be discussed in Section 2.

Our purpose was to use neural nets studying linear mappings from exact and also from deformed data. Planar linear mappings, like rotation or affine transformation play essential role in computer graphics. Even if we want to display spatial objects or movements with our computer, a classical parallel projection or other kind of (degenerate) linear mapping has to be used. Of course each of these linear mappings has a linear system of equations (or a matrix) which transforms the co-ordinates of the points. Hence in the first part of the research, when the neural nets have to be trained by these well-known mappings, we could evaluate the speed of training. Since every linear mapping has a crucial number of points, with which the transformation is uniquely determined, the nets are trained by that amount of pair of points (e.g. three pairs of points for a planar affine transformation).

However it can be happened, that among the data there are one or more 'false' pair of points. If five or more general pairs of points are given in the plane there is no exact linear transformation which maps the points onto their image points, since the most general linear transformation, the projective transformation is given by four pairs of points. Hence we can compute a system of equations from four pairs, but there is no guarantee that this mapping will transform the rest of the points onto their given images, usually the computed images and the given image points will be far from each other. With the help of the neural nets we will give a mapping for any number of given points, which will be linear and has the smallest error in the image points.

2. The neural network and the back-propagation algorithm

Studying the planar linear mappings the applied neural network is a two layered network with two or three input nodes in the first layer and two or three output nodes in the second layer entirely connected to each other. The layers consist of two or three nodes according ot the current transformations e.g. we use projective co-ordinates to describe the projective mappings, and points has three projective co-ordinates in the plane (for the use of projective geometry see [1]). Since neural nets and especially the back-propagation algorithm are well-known computational tools, we give only a short description of the algorithm referring mainly the differences between the widely used method and the present one. For a more detailed survey see e.g.[3].

The main difference, as we can see from the algorithm presented below, that since we want to compute linear mappings, the nodes of the neural net has no the generally used sigmoid function to compute the output, but a simple weighted sum is computed instead. Hence some of the training rules which would consist the derivative of the sigmoid function, will be simplified.

STEP 1. Set all weights w_{ij} to small random values (where w_{ij} denotes the weight associated to the connection between the i^{th} node of the input layer and the j^{th} node of the output layer.

STEP 2. Present a randomly chosen input, i.e. the co-ordinates of an input point.

STEP 3. Calculate the output, i.e. the weighted sum of the coordinates

$$\text{output}_j = \sum_i w_{ij} \,\text{input}_i$$

STEP 4. Adapt weights by the equation

$$w_{ij} = w_{ij} + \eta\delta_j \,\text{input}_i$$

where $\eta \in [0,1]$ is the so called gain term, while δ_j is the difference between the desired and the received output value in the j^{th} output node.

STEP 5. Repeat by going STEP 2. until the net is trained.

The network is said to be trained if all the outputs fit the desired output points, or, in case of over-defined data, if the changes of the weights fall under a predefined limit.

3. Training by well-defined linear mappings

Basic theorems of geometry state how many pairs of points determine uniquely a certain transformation in the plane. Hence if we want to define a rotation, an affine or a projective transformation, we have to give two, three or four pairs of general points (any three among them should be non-collinear).

Our question is to evaluate how fast the neural network can be trained by a set of data described above. On the other hand, we want to examine how exact the training is, since after the training procedure theoretically the weights should be equal to the coefficients of the appropriate system of equations. Indeed, if a general affine transformation is given by the equations

$$\tilde{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$$
$$\tilde{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$

then comparing it with the equations yield the output of the network

$$\mathrm{output}_1 = w_{11}\,\mathrm{input}_1 + w_{21}\,\mathrm{input}_2 + w_{31}\,\mathrm{input}_3$$
$$\mathrm{output}_2 = w_{12}\,\mathrm{input}_1 + w_{22}\,\mathrm{input}_2 + w_{32}\,\mathrm{input}_3$$

where $\mathrm{input}_3 = 1$, one can easily see, that the $a_{ji} = w_{ij}$ must hold for all i, j.

In case of well-defined linear mappings every run was successful under 1100 iteration (accuracy was 10^{-5}) and the training was exact. The following table shows the results after 1000 runs.

transformation	iterations
translation	343
rotation	400
affine tr.	500
projective tr.	1068

Our other table shows how the number of iteration changes in term of accuracy, in case of projective transformation.

accuracy	iterations
10^{-5}	500
10^{-10}	916
10^{-15}	1705

4. Training by over-defined data

If we consider an arbitrary linear mapping, then a certain number belongs to that mapping, which shows how many pairs of points define the mapping uniquely. If the number of input points exceeds this limit then our data set is said to be over-defined.

An over-defined set of data does not necessary mean false data set. We can compute the image of several points by a transformation, and if these pair of points are considered as the input data, the neural network has to produce exactly the same transformation. If we consider an affine transformation and 50 points and their images as input data, the training of the net will be slower than in the case of three points, but the same transformation will be received.

This table shows how the number of iterations changes if the number of points increases. Since one iteration means to feed all of the given points as input for the net, the total number of input simply the product of the number of iterations and the number of input points.

points	iterations
3	500
10	61
100	6

However over-defined data set could mean arbitrary pairs of points, the number of which is greater than the necessary number of data. In this case the set could be called false data, since there is no transformation which could map these points to their images. More precisely, if we consider affine transformations and the number of input points is 4, then there is no affine transformation for these points (of course a projective transformation can be easily computed from these data). But if we have 5 or more pairs of arbitrary points, then generally there is no any kind of linear transformation mapping these points to their images. This problem can occur e.g. as a wrong scanning or digitalisation of an image. Of course the false data are normally not completely wrong, perhaps only a corner of a figure will be curved, but the theoretical problem remains the same.

In this very case one can try to find a mapping which produced this image, but that transformation will not be linear, or can find a linear mapping which is close to the original one, that is the input points will be mapped almost to their images. Neural networks are applicable for both problems, but in this paper we consider only the latter case.

If we have a set of false data, first we have to decide which type of linear mapping is the desired. The main difference is, that affine transformation will preserve parallelism, but probably the difference between the desired and actual output will be larger. If we need smaller error, projective transformation has to be chosen.

Since the neural net does not 'know' if the set of data is correct or false, the training algorithm will be the same described above, however the number of iterations can be increased significantly. The error of the transformation can be measured by corrupting original transformations. Since neural networks minimize the cost function equal to the mean square difference (see [2]), the error (measured by Euclidean distance of the desired and actual output) will be lower, than the squareroot of the distortion of the original transformation.

5. Conclusion

In this paper artificial neural net with back-propagation training algorithm will be used to study linear mappings. First the effectiveness of the net will be discussed when exact linear transformation will be trained from a set of input data, the number of which were the same as the theoretical limit for the unique determination of the transformation. The training was succesfull and fast, even for larger number of input points.

On the other hand correction of corrupted linear transformation has been discussed. If the number of input points are exceeds the limit mentioned above, then there is no theoretical way to find linear mapping which transforms the given data to their images. Here arbitrary set of input points was given, and the neural net, trained by these data, has found the best fitting linear mapping.

References

[1] Herman, I., The Use of Projective Geometry in Computer Graphics, *Lecture Notes in Computer Science* 564, Springer-Verlag, 1991.

[2] Lippmann, R. P., An Introduction to Computing with Neural Nets, *IEEE ASSP Magazine*, April 1987, 4–22.

[3] Rojas, R., Neural Networks. A Systematic Introduction, Springer-Verlag, 1996.

[4] Hoffmann M., Várady L., Free-form curve design by neural networks, *Acta Acad. Paed. Agriensis*, Vol. XXIV., 1997, 99–104.

[5] Hoffmann, M., Várady, L., Free-form Surfaces for Scattered Data by Neural Networks, *Journal for Geometry and Graphics*, Vol. 2, No.1, 1998, 1–6.

[6] Várady, L., Hoffmann, M., Kovács, E., Improved Free-form Modelling of Scattered Data by Dynamic Neural Networks, *Journal for Geometry and Graphics*, Vol. 3, No.2, 1999, 177–181.

[7] Hoffmann, M., Modified Kohonen Neural Network for Surface Reconstruction, *Publ. Math. Debrecen*, Vol. 54 Suppl., 1999, 857–864.

Emőd Kovács
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers' Training College
Leányka str. 4–6.
H-3300 Eger, Hungary

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 19–23*

ON POLYNOMIAL VALUES OF THE PRODUCT OF THE TERMS OF LINEAR RECURRENCE SEQUENCES

Kálmán Liptai (EKTF, Hungary)

Abstract: Let G and H be linear recurrence sequences and let $F(x) = dx^q + d_p x^p + d_{p-1}x^{p-1} + \cdots + d_0$, where d and d_i's are rational integers, be a polynomial. In this paper we showed that for the equation $G_n H_m = F(x)$, with some restriction, there are no solutions in n, m and x if $q > q_0$, where q_0 is an effectively computable positive constant.

1. Introduction

Let $G = \{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a linear recursive sequence of order k (≥ 2) defined by

$$G_n = A_1 G_{n-1} + \cdots + A_k G_{n-k} \quad (n \geq k),$$

where $G_0, G_1, \ldots, G_{k-1}, A_1, A_2, \ldots, A_k$ are rational integer constants. We need an other sequence, too. Let $H = \{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ be another linear recurrence of order l defined by

$$H_n = B_1 H_{n-1} + \cdots + B_l H_{n-l} \quad (n \geq l),$$

where the initial terms $H_0, H_1, \ldots, H_{l-1}$ and the B_i's are given rational integers. We suppose that $A_k \neq 0$, $B_l \neq 0$, and that the initial values of both sequences are not all zero.

Denote the distinct zeros of the characteristic polinomial

$$g(x) = x^k - A_1 x^{k-1} - \cdots - A_k$$

by $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, and similarly let $\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ be the distinct zeros of the polinomial

$$h(x) = x^l - B_1 x^{l-1} - \cdots - B_l.$$

We suppose that $s > 1$, $t > 1$ and $|\alpha| = |\alpha_1| > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \cdots \geq |\alpha_s|$ and $|\beta| = |\beta_1| > |\beta_2| \geq |\beta_3| \geq \cdots \geq |\beta_t|$. Consequently, we have $|\alpha| > 1, |\beta| > 1$. Assume that α and β have multiplicity 1 in the characteristic polynomials. As it is known the terms of the sequences G and H can be written in the form

$$G_n = a\alpha^n + r_2(n)\alpha_2^n + \cdots + r_s(n)\alpha_s^n \quad (n \geq 0), \tag{1}$$

Research supported by the Hungarian National Scientific Research Foundation, Operating Grant Number OTKA T 016 975 and 29330.

and

$$H_n = b\beta^n + q_2(n)\beta_2^n + \cdots + q_t(n)\beta_t^n \quad (n \geq 0), \tag{2}$$

where r_i's, q_j's are polynomials and the coefficients of the polynomials, a and b are elements of the algebraic number field $\mathbf{Q}(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta, \beta_2, \ldots, \beta_t)$. In the following we assume that $ab \neq 0$ and

$$F(x) = dx^q + d_p x^p + d_{p-1} x^{p-1} + \cdots + d_0, \tag{3}$$

is a polynomial with rational integer coefficients, where $d \neq 0$, $q \geq 2$ and $q > p$.

The Diophantine equation

$$G_n = F(x) \tag{4}$$

with positive integer variables n and x was investigated by several authors. It is known that if G is a nondegenerate second order linear recurrence, with some restrictions, and $F(x) = dx^q$ then the equation (4) have finitely many integer solutions in variables $n \geq 0, x$ and $q \geq 2$.

For general linear recurrences we know a similar result (see [4]). A more general result was proved by I. Nemes and A. Pethő [3]. They proved the following theorem: let G_n be a linear recurrence sequence defined by (1) and let $F(x)$ be a polinomial defined by (3). Suppose that $\alpha_2 \neq 1, |\alpha| = |\alpha_1| > |\alpha_2| > |\alpha_i|$ for $3 \leq i \leq s$, $G_n \neq a\alpha^n$ for $n > c_1$ and $p \leq qc_2$. Then all integer solution $n, |x| > 1, q \geq 2$ of the equation (4) satisfy $q < c_3$, where c_1, c_2 and c_3 are effectively computable positive constants depending on the parameters of the sequence G and the polynomial $F(x)$.

P. Kiss [2] showed that some conditions of the above result can be left out.

We prove a theorem which investigates a similar property of the product of the terms of two different linear recurrences. In the theorem and its proof $c_4, c_5, \ldots$ will denote effectively computable positive constants which depend on the sequences, the polynomial $F(x)$ and the constants in the following theorem.

Theorem. *Let G and H be linear recursive sequences satisfying the above conditions. Let $K > 1$ and δ $(0 < \delta < 1)$ be real numbers. Furthermore let $F(x)$ be a polynomial defined in (3) with the condition $p < \delta q$. Assume that $G_i \neq a\alpha^i$, $H_j \neq b\beta^j$ if $i, j > n_0$ and $\alpha \notin \mathbf{Z}$ or $\beta \notin \mathbf{Z}$. Then the equation*

$$G_n H_m = F(x) \tag{5}$$

in positive integers n, m, x for which $m \leq n < Km$, implies that $q < q_0$ $(n_0, G, H, K, F, \delta)$, where q_0 is an effectively computable number (which depends on only n_0, G, H K, F and δ).

In the proof of the Theorem we shall use the following result due to A. Baker (see Theorem 1. in [1] with $\delta = \frac{1}{\delta}$). In this lemma the height of an algebraic number means the height of the minimal defining polynomial of the algebraic number.

Lemma. *Let $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ be non-zero algebraic numbers of heights not exceeding $M_1, M_2, \dots, M_r$ respectively ($M_r \geq 4$). Further let $b_1, \dots, b_{r-1}$ be rational integers with absolute values at most B and let b_r be a non-zero rational integer with absolute value at most B' ($B' \geq 3$). Then there exists a computable constant $C = C(r, M_1, \dots, M_{r-1}, \pi_1, \dots, \pi_r)$ such that the inequalities*

$$0 \neq \left|\sum_{i=1}^{r} b_i \log \pi_i\right| > e^{-C(\log M_r \log B' + \frac{B}{B'})}$$

are satisfied. (It is assumed that the logarithms have their principal values.)

Proof. Suppose that (5) holds with the conditions given in the Theorem. We may assume without loss of generality that $|\alpha| \geq |\beta|$ and that the terms of the sequences G, H are positive and $x > 1$. We may assume that $n > n_0$ and $m > n_0$. By (1), (2) and (5) we have

$$F(x) = a\alpha^n \left(1 + \frac{r_2(n)}{a}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^n + \cdots\right) b\beta^m \left(1 + \frac{q_2(m)}{b}\left(\frac{\beta_2}{\beta}\right)^m + \cdots\right).$$

By the assumption $|\alpha| > |\alpha_i|$ and $|\beta| > |\beta_i|$ we obtain that

$$\left(1 + \frac{r_2(n)}{a}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^n + \cdots\right) \to 1 \quad \text{as} \quad n \to \infty, \tag{6}$$

and

$$\left(1 + \frac{q_2(m)}{b}\left(\frac{\beta_2}{\beta}\right)^m + \cdots\right) \to 1 \quad \text{as} \quad m \to \infty. \tag{7}$$

Then (5) can be written in the form

$$\begin{gathered}\frac{ab\alpha^n\beta^m}{dx^q} = (1+\varepsilon_1)((1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3))^{-1} = \left(1 + \sum_{i=0}^{p} \frac{d_i}{d} x^{i-q}\right) \\ \left(\left(1 + \frac{1}{a}\sum_{i=2}^{s} r_i(n)\left(\frac{\alpha_i}{\alpha}\right)^n\right)\left(1 + \frac{1}{b}\sum_{i=2}^{t} q_i(m)\left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^m\right)\right)^{-1}\end{gathered} \tag{8}$$

where

$$|\varepsilon_1| = \left|\frac{d_p}{d}\left(\frac{1}{x}\right)^{q-p}\right|\left|1 + \frac{d_{p-1}}{d_p}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots\right| \tag{9}$$

$$|\varepsilon_2| = \left|\frac{r_2(n)}{a}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^n\right|\left|1 + \frac{r_3(n)}{r_2(n)}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^n + \cdots\right| \tag{10}$$

and

$$|\varepsilon_3| = \left|\frac{q_2(m)}{b}\left(\frac{\beta_2}{\beta}\right)^m\right|\left|1+\frac{q_3(m)}{q_2(m)}\left(\frac{\beta_3}{\beta_2}\right)^m+\cdots\right| \tag{11}$$

Using (8), (9), (10), (11) and $m \le n < Km$ we have

$$c_4 x^{\frac{1}{2}} < |\alpha|^{\frac{n}{q}} < x^{c_5}. \tag{12}$$

Therefore by (9), (10), (11) and (12) we have the following inequalities

$$|\varepsilon_1| < \left|\frac{1}{\alpha}\right|^{c_6\frac{q-p}{q}n}, \quad |\varepsilon_2| < \left|\frac{\alpha_2}{\alpha}\right|^{c_7 n}, \quad |\varepsilon_3| < \left|\frac{\beta_2}{\beta}\right|^{c_8 n}. \tag{13}$$

We distinguish two cases. First we suppose that

$$x^q = \frac{ab}{d}\alpha^n\beta^m,$$

moreover, without loss of generality we may assume that $\alpha \notin \mathbf{Z}$. Let $\alpha' \neq \alpha$ be any conjugate of α and let φ be an automorphism of $\overline{\mathbf{Q}}$ with $\varphi(\alpha) = \alpha'$. Then $\varphi(\beta) = \beta'$ is a conjugate of β and $|\beta'| \le |\beta|$, $|\alpha'| < |\alpha|$. Moreover,

$$\frac{ab}{c}\alpha^n\beta^m = \varphi\left(\frac{ab}{c}\right)(\varphi(\alpha))^n(\varphi(\beta))^m.$$

Thus

$$\left|\left(\frac{\alpha}{\varphi(\alpha)}\right)^n\right| = \left|\frac{c\varphi(ab)}{ab\varphi(c)}\left(\frac{\varphi(\beta)}{\beta}\right)^m\right| \le \left|\frac{c\varphi(ab)}{ab\varphi(c)}\right|,$$

whence n is bounded, which implies that q is bounded.

Now we can suppose that $dx^q \neq ab\alpha^n\beta^m$. Applying the Lemma with $M_6 = x$, $B' = q$ and $B = n$, it follows that

$$\begin{aligned} L := \left|\log\frac{dx^q}{a\alpha^n b\beta^m}\right| &= |q\log x - \log a - n\log\alpha - \log b - m\log\beta| \\ &> e^{-C(\log x \log q + \frac{n}{q})}. \end{aligned}$$

On the other hand, using that $\frac{q-p}{q} > 1-\delta$ and (13) we can derive an upper bound for L

$$L < 2|\varepsilon_1| + 2|\varepsilon_2| + 2|\varepsilon_3| < e^{-c_9 n}$$

and it follows that

$$c_{10}(\log x \log q + \frac{n}{q}) > c_9 n. \tag{14}$$

By (12) we have

$$c_{11} \log x < \frac{n}{q} < c_{12} \log x, \tag{15}$$

so by (14) and (15)

$$\log q \log x > c_{12} n > c_{13} q \log x$$

and

$$\frac{\log q}{q} > c_{13}.$$

This can be satisfied only by finitely many positive integer q so our theorem is proved.

References

[1] A. Baker, A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms II, *Acta Arithm.*, **24** (1973), 33–36.

[2] P. Kiss, Note on a result of I. Nemes and A. Pethő concerning polynomial values in linear recurrences, (to appear).

[3] I. Nemes and A. Pethő, Polynomial values in linear recurrences, *Publ. Math. Debrecen,* **31** (1984), 229–233.

[4] T. N. Shorey and C. L. Stewart, On the Diophantine equation $ax^{2t} + bx^t y + cy^2 = d$ and pure powers in recurrence sequences, *Math. Scand.,* **52** (1983), 24–36.

Kálmán Liptai
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers' Training College
Leányka str. 4–6.
H-3301 Eger, Hungary

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 25–30*

ON A PROBLEM CONCERNING PERFECT POWERS IN LINEAR RECURRENCES

Péter Kiss (EKTF, Hungary)

Abstract: For a linear recurrence sequence $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ of rational integers of order $k \geq 2$ satisfying some conditions, we show that the equation $sG_x^r = w^q$, where $w > 1$ and r are positive integers and s contains only given primes as its prime factors, implies the inequality $q < q_0$, where q_0 is an effective computable constant depending on the sequence, the prime factors of s and r.

Let $G = \{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a linear recurrence sequence of order $k \geq 2$ defined by

$$G_n = A_1 G_{n-1} + A_2 G_{n-2} + \cdots + A_k G_{n-k} \quad (n \geq k),$$

where $A_1, \ldots, A_k$ are given rational integers with $A_k \neq 0$ and the initial values $G_0, G_1, \ldots, G_{k-1}$ are not all zero integers. We denote by $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ the distinct roots of the polynomial

$$g(x) = x^k - A_1 x^{k-1} - A_2 x^{k-2} - \cdots - A_k,$$

furthermore we suppose that $|\alpha| > |\alpha_i|$ for $2 \leq i \leq s$, and the roots $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ have multiplicity $m_1 = 1, m_2, \ldots, m_s$. In this case $|\alpha| > 1$ and, as it is well known, the terms of G can be writen in the form

$$G_n = a\alpha^n + g_2(n)\alpha_2^n + \cdots + g_s(n)\alpha_s^n \quad (n \geq 0), \tag{1}$$

where g_i $(2 \leq i \leq s)$ is a polynomial of degree $m_i - 1$, furthermore a and the coefficients of g_i are elements of the algebraic number field $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$.

Several authors investigated the perfect powers in the recurrences G. Among others T. N. Shorey and C. L. Stewart [6] proved that for a given integer $d (\neq 0)$ the equation

$$G_x = dw^q$$

with positive integers $x, w (> 1)$ and q implies the inequality $q < N$, where N is an effectively computable constant depending only on d and G. In [4] we gave an improvement of this result substituting d by integers containing only fixed prime factors. For second order recurrences $(k = 2)$ A. Pethő obtained more strict

Research was supported by Hungarian OTKA foundation, No. T 020295 and 29330.

results (e.g. see [5]). In [2] B. Brindza, K. Liptai and L. Szalay proved, under some conditions, that for recurrences G and H the equation

$$G_x H_y = w^q$$

can be satisfied only if q is bounded above. We proved [3] that for a sequence G and fixed positive integer n from

$$G_n^r G_x^{q-r} = w^q,$$

with $0 < r \leq q/2$, it follows that q is bounded above.

In this note we prove the following theorems.

Theorem 1. *For given primes $p_1, \dots, p_t$ let S be a set of integers defined by*

$$S = \{n : n \in \mathbb{N},\ n = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\beta_i},\ \beta_i \geq 0\}.$$

Let $r \geq 1$ be an integer and let G be a linear recurrence defined in (1) satisfying the conditions $a \neq 0$ and $G_n \neq a\alpha^n$ for $n \geq n_0$. Then the equation

$$sG_x^r = w^q \tag{2}$$

with positive integers $s \in S$, $w > 1$ and $x > x_0$ (x_0 depends on G and r) implies that $q < q_0$, where q_0 is an effectively computable constant depending on n_0, r, the sequence G and the primes $p_1, \dots, p_t$.

Theorem 2. *Let G be a linear recurrence defined by (1) satisfying the conditions $a \neq 0$ and $G_n \neq a\alpha^n$ for $n \geq n_0$. If*

$$G_y^{q-r} G_x^r = w^q$$

for positive integers x, y, q and r with the conditions $(q, r) = 1$ and $y < n_1$, then $q < q_1$, where q_1 is a constant depending on G, n_0 and n_1, but does not depend on r.

In the proofs we need some lemmas.

Lemma 1. *Let $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v$ ($\omega_i \neq 0$ or 1) be algebraic numbers and let $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_v$ be not all zero rational integers. Suppose that $\omega_1, \dots, \omega_v$ have heights $M_1, \dots, M_v (\geq 4)$, furthermore $|\gamma_i| \leq B$ ($B \geq 4$) for $i = 1, 2, \dots v-1$ and $|\gamma_v| \leq B'$. Further let*

$$\Lambda = \gamma_1 \log \omega_1 + \gamma_2 \log \omega_2 + \dots + \gamma_v \log \omega_v,$$

where the logarithms mean their principal values. If $\Lambda \neq 0$, *then there exists an effectively computable constant* $c > 0$, *depending only on* $v, M_1, \ldots, M_{v-1}$ *and the degree of the field* $\mathbb{Q}(\omega_1, \ldots, \omega_v)$, *such that for any* δ *with* $0 < \delta < 1/2$ *we have*

$$|\Lambda| > (\delta/B')^{c \log M_v} e^{-\delta B}.$$

(see A. Baker [1]).

Lemma 2. *Let* a, b, c, q *and* r *be positive integers with* $0 < r < q$ *and* $(q, r) = 1$. *If*

$$a^{q-r} b^r = c^q, \tag{3}$$

then for any integer r_1 *with* $0 < r_1 < q$ *there is a positive integer* d, *such that*

$$a^{q-r_1} b^{r_1} = d^q.$$

Proof of Lemma 2. From (3)

$$\left(\frac{b}{a}\right)^r = \left(\frac{c}{a}\right)^q$$

follows. Let x and y be integers for which $rx + qy = r_1$. Then

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{rx} = \left(\frac{c}{a}\right)^{qx}$$

and

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{rx} \left(\frac{b}{a}\right)^{qy} = \left(\frac{b}{a}\right)^{r_1} = \left(\frac{c}{a}\right)^{qx} \left(\frac{b}{a}\right)^{qy}$$

from which

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{r_1} a^q = a^{q-r_1} b^{r_1} = \left(\frac{c^x b^y a}{a^{x+y}}\right)^q = d^q$$

follows, where d is an integer since $a^{q-r_1} b^{r_1}$ is integer.

Proof of Theorem 1. In the proof we denote by $c_1, c_2, \ldots$ effectively computable positive constants, which depend only on n_0, r, the sequence G and the primes $p_1, \ldots, p_t$. Suppose that equation (2) holds with the conditions given in the theorem. We can suppose that

$$s = p_1^{u_1} \cdots p_t^{u_t}, \text{ where } 0 \leq u_i < q \text{ for } 1 \leq i \leq t. \tag{4}$$

Namely if

$$s = \prod_{i=1}^{t} p_i^{u_i + q v_i} = \prod_{i=1}^{t} p_i^{u_i} \left(\prod_{i=1}^{t} p_i^{v_i} \right)^q ,$$

then $w / \prod_{i=1}^{t} p_i^{v_i}$ is also an integer and greater than 1.

By (1), equation (2) can be written in the form

$$\lambda = \frac{w^q}{s a^r \alpha^{xr}} = \left(1 + \frac{g_2(x)}{a} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha} \right)^x + \cdots \right)^r , \tag{5}$$

where $|\lambda| \neq 1$ if $x > n_0$. Using the properties of the exponential and logarithm functions, by (5) and $|\alpha| > |\alpha_i|$ $(i = 2, \ldots, s)$

$$|\lambda| < \left| 1 + e^{-c_1 x} \right|^r$$

and

$$|\log |\lambda|| < r e^{-c_2 x} = e^{\log r - c_2 x} \tag{6}$$

follows. On the other hand, by (5)

$$|\log |\lambda|| = \left| q \log w - r \log |a| - x r \log |\alpha| - \sum_{i=1}^{t} u_i \log p_i \right| . \tag{7}$$

By (2) and (4) it follows that

$$G_x^r > \left(\frac{w}{\prod_{i=1}^{t} p_i} \right)^q ,$$

where $w / \prod_{i=1}^{t} p_i > 1$ is an integer since any prime factor of s divides w. From this inequality, using (1),

$$\log \left(|a|^r |\alpha|^{rx} \right) > c_3 q \log w \left(1 - \frac{\log \left(\prod_{i=1}^{t} p_i \right)}{q \log w} \right)$$

follows and so, if q is large enough,

$$q < c_4 r x \text{ and } x > c_5 q \log w. \tag{8}$$

Since $u_i < q < c_4 rx$, using Lemma 1 with $v \leq t+3$, $\omega_v = w$, $M_v = 2w$ (≥ 4), $B' = q$ and $B = c_4 xr$, from (7) we obtain the inequality

$$|\log|\lambda|| > (\delta/q)^{c_6 \log 2w} e^{-\delta c_4 rx} = e^{-(\log q - \log\delta) c_6 \log 2w - \delta c_4 rx} \tag{9}$$

for any $0 < \delta < 1/2$. By (6) and (9) we obtain that

$$(\log q - \log\delta) c_6 \log 2w + \delta c_4 rx > -\log r + c_2 x$$

and

$$c_7 \log q \log w > c_8 x, \tag{10}$$

if we choose x_0 and δ such that

$$c_2 - \delta c_4 r - \frac{\log r}{x} > 0,$$

i.e.

$$\delta < \frac{c_2 - \frac{\log r}{x}}{c_4 r}.$$

But by (10) and (8)

$$\log q \log w > c_9 q \log w$$

which implies that q is bounded above.

Proof of Theorem 2. Using Lemma 2 with $a = G_y$, $b = G_x$ and $r_1 = 1$, the equation of the theorem can be transformed into the form

$$G_y^{q-1} G_x = d^q,$$

where d is an integer. From this, by Theorem 1, our assertion follows if we choose the set S such that $G_i \in S$ for any $0 < i < n_1$.

References

[1] A. Baker, A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms II, *Acta Arithm.* **24** (1973), 33–36.

[2] B. Brindza, K. Liptai and L. Szalay, On products of the terms of linear recurrences, In: Number Theory, Eds.: Győry–Pethő–Sós, Walter de Gruyter, Berlin-New York, (1998), 101–106.

[3] J. P. Jones and P. Kiss, Pure powers in linear recursive sequences (Hungarian, English summary), *Acta Acad. Paed. Agriensis,* **22** (1994), 55–60.

[4] P. Kiss, Differences of the terms of linear recurrences, *Studia Sci. Math. Hungar.,* **20** (1985), 285–293.

[5] A. Pethő, Perfect powers in second order linear recurrences, *J. Number Theory,* **15** (1982), 5–13.

[6] T. N. Shorey and C. L. Stewart, On the Diophantine equation $ax^{2t} + bx^t y + cy^2 = d$ and pure powers in recurrence sequences, *Math. Scand.,* **52** (1982), 24–36.

Péter Kiss
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers' Training College
Leányka str. 4–6.
H-3301 Eger, Hungary

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 31–38*

AN ASSOCIATIVE ALGORITHM

Gyula Maksa (KLTE, Hungary)

Abstract: In this note we introduce the concept of the associative algorithm with respect to an interval filling sequence, we characterize it and we show that the regular algorithm is associative with respect to any interval filling sequence.

1. Introduction

Let Λ be the set of the strictly decreasing sequences $\lambda = (\lambda_n)$ of positive real numbers for which $L(\lambda) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$. A sequence $(\lambda_n) \in \Lambda$ is called *interval filling* if, for any $x \in [0, L(\lambda)]$, there exists a sequence (δ_n) such that $\delta_n \in \{0,1\}$ for all $n \in I\!N$ (the set of all positive integers) and $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n \lambda_n$. This concept has been introduced and discussed in Daróczy–Járai–Kátai [3]. It is known also from [3] that $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ is interval filling if and only if $\lambda_n \le L_{n+1}(\lambda)$ for all $n \in I\!N$ where $L_m(\lambda) = \sum\limits_{i=m}^{\infty} \lambda_i$, $(m \in I\!N)$. The set of the interval filling sequences will be denoted by IF.

An *algorithm* (with respect to $\lambda = (\lambda_n) \in IF$) is defined as a sequence of functions $\alpha_n \colon [0, L(\lambda)] \to \{0,1\}$ $(n \in I\!N)$ for which

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \lambda_n \qquad (x \in [0, L(\lambda)]).$$

We denote the set of algorithms (with respect to $\lambda = (\lambda_n) \in IF$) by $\mathcal{A}(\lambda)$. Obviously, $\mathcal{A}(\lambda) \ne \emptyset$ for all $\lambda \in IF$. Namely, it was proved in [3] that, if $\lambda = (\lambda_n) \in IF$ and

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < \sum\limits_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i + \lambda_n, \\ 1, & \text{if } x \ge \sum\limits_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i + \lambda_n, \qquad (n \in I\!N,\ x \in [0, L(\lambda)]) \end{cases}$$

This research has been supported by grants from the Hungarian National Foundation for Scientific Research (OTKA) (No. T-016846) and from the Hungarian High Educational Research and Developing Fund (FKFP) (No. 0310/1997).

or

$$\mathcal{E}'_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \le \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}'_i(x)\lambda_i + L_{n+1}(\lambda), \\ 1, & \text{if } x > \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}'_i(x)\lambda_i + L_{n+1}(\lambda), \end{cases} \qquad (n \in I\!N,\ x \in [0, L(\lambda)])$$

then $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n) \in \mathcal{A}(\lambda)$ and $\mathcal{E}' = (\mathcal{E}'_n) \in \mathcal{A}(\lambda)$. The algorithms $\mathcal{E}$ and $\mathcal{E}'$ are called *regular* and *anti-regular* algorithms, respectively. In general, there are much more algorithms with respect to an interval filling sequence. They are described and characterized in Daróczy–Maksa–Szabó [4]. The purpose of this paper is to introduce the concept of associative algorithm with respect to an interval filling sequence, to characterize it, and to show that the regular algorithm is associative with respect to any interval filling sequence.

2. The regular algorithm is associative

Definition. Let $\lambda = (\lambda_n) \in IF$ and $(\alpha_n) \in \mathcal{A}(\lambda)$. Then the algorithm (α_n) is *associative* if the binary operation $\circ\colon [0, L(\lambda)] \times [0, L(\lambda)] \to [0, L(\lambda)]$ defined by

$$x \circ y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\alpha_n(y)\lambda_n \qquad (x, y \in [0, L(\lambda)]) \tag{1}$$

is associative, that is,

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \qquad (x, y, z \in [0, L(\lambda)]).$$

Obviously, the operation $\circ$ is well-defined by (1) and it is commutative, i.e., $x \circ y = y \circ x$ for all $x, y \in [0, L(\lambda)]$, and idempotent, i.e., $x \circ x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)^2\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda_n = x$ for all $x \in [0, L(\lambda)]$. First we prove the following

Theorem 1. *Let $\lambda = (\lambda_n) \in IF$, $\alpha = (\alpha_n) \in \mathcal{A}(\lambda)$. Then α is associative, if and only if, $\alpha(x \circ y) = \alpha(x)\alpha(y)$, that is,*

$$\alpha_n(x \circ y) = \alpha_n(x)\alpha_n(y) \qquad (n \in I\!N;\ x, y \in [0, L(\lambda)]). \tag{2}$$

Proof. Suppose that (2) holds. Then, for all $x, y, z \in [0, L(\lambda)]$, we have

$$(x \circ y) \circ z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x \circ y)\alpha_n(z)\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\alpha_n(y)\alpha_n(z)\lambda_n = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\alpha_n(y \circ z)\lambda_n = x \circ (y \circ z).$$

On the other hand, suppose that α is associative. Then, by idempotency, $x \circ y = (x \circ x) \circ y = x \circ (x \circ y)$, that is,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x \circ y)\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\alpha_n(x \circ y)\lambda_n \qquad (x, y \in [0, L(\lambda)])$$

whence

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n(x))\alpha_n(x \circ y)\lambda_n \qquad (x, y \in [0, L(\lambda)]).$$

This implies that $(1 - \alpha_n(x))\alpha_n(x \circ y) = 0$, that is,

$$\alpha_n(x \circ y) = \alpha_n(x)\alpha_n(x \circ y) \qquad (n \in I\!N;\ x, y \in [0, L(\lambda)]) \tag{3}$$

and, by interchanging x and y, we obtain

$$\alpha_n(x \circ y) = \alpha_n(y)\alpha_n(x \circ y) \qquad (n \in I\!N;\ x, y \in [0, L(\lambda)]). \tag{4}$$

Since $\alpha_n^2(t) = \alpha_n(t) \in \{0, 1\}$ for all $t \in [0, L(\lambda)]$ and for all $n \in I\!N$, (3) and (4) yield

$$\alpha_n(x \circ y) = \alpha_n^2(x \circ y) = \alpha_n(x)\alpha_n(y)\alpha_n^2(x \circ y) \le \alpha_n(x)\alpha_n(y) \tag{5}$$

for all $x, y \in [0, L(\lambda)]$ and $n \in I\!N$. Therefore, by (1),

$$0 = x \circ y - (x \circ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\alpha_n(y)\lambda_n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x \circ y)\lambda_n = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n(x)\alpha_n(y) - \alpha_n(x \circ y))\lambda_n$$

whence, by (5), (2) follows. Thus the proof is complete.

The following characterization of the regular algorithm, which is due to Daróczy, Járai, Kátai and Szabó (personal communication), is the other tool for proving the associativity of the regular algorithm.

Theorem 2. *Let $\lambda = (\lambda_n) \in I\!F$ and $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \lambda_n$ with some $(t_n)\colon I\!N \to \{0,1\}$. Then $t_n = \mathcal{E}_n(x)$ for all $n \in I\!N$, if and only if,*

$$k \in I\!N \text{ and } t_k = 0 \text{ imply that } \lambda_k > \sum_{i=k+1}^{\infty} t_i \lambda_i. \tag{6}$$

Proof. First suppose that $t_n = \mathcal{E}_n(x)$ for all $n \in I\!N$ and let $k \in I\!N$ be fixed. Then, by definition, $\mathcal{E}_k(x) = 0$ implies that

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\lambda_n < \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i + \lambda_k,$$

whence

$$\lambda_k > \sum_{i=k}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i = \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i = \sum_{i=k+1}^{\infty} t_i\lambda_i,$$

that is, (6) holds.

Next, suppose (6) to be hold. Futrhermore suppose, in the contrary, that $t_{n_0} \neq \mathcal{E}_{n_0}(x)$ for some $n_0 \in I\!N$ while $t_i = \mathcal{E}_i(x)$, $i \in \{1, \ldots, n_0 - 1\}$ ($\{1, \ldots, n_0 - 1\} = \emptyset$ if $n_0 = 1$). Then

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n_0-1} t_i\lambda_i + t_{n_0}\lambda_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} t_i\lambda_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n_0-1} t_i\lambda_i + \mathcal{E}_{n_0}(x)\lambda_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i. \end{aligned} \tag{7}$$

If $\mathcal{E}_{n_0}(x) = 1$ then $t_{n_0} = 0$, so (7) gives the contradiction to (6):

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} t_i\lambda_i - \lambda_{n_0} = \sum_{n_0+1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i \geq 0.$$

If $\mathcal{E}_{n_0}(x) = 0$ then $t_{n_0} = 1$ so, by the definition of $\mathcal{E}_{n_0}(x)$, we have

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} t_i\lambda_i + \lambda_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} t_i\lambda_i = x < \sum_{i=1}^{n_0-1} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i + \lambda_{n_0} = \sum_{i=1}^{n_0-1} t_i\lambda_i + \lambda_{n_0}$$

which is impossible again. Thus the theorem is proved.

Now we are ready to prove our main result.

Theorem 3. *The regular algorithm* $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)$*, with respect to any interval filling sequence* $\lambda = (\lambda_n)$ *is associative.*

Proof. We shall prove that

$$\mathcal{E}_n(x \circ y) = \mathcal{E}_n(x)\mathcal{E}_n(y) \qquad (n \in I\!N;\ x, y \in [0, L(\lambda)]).$$

Let $x, y \in [0, L(\lambda)]$, $k \in I\!N$ and $\mathcal{E}_k(x)\mathcal{E}_k(y) = 0$. Then, by Theorem 2,

$$\lambda_k > \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i \geq \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\mathcal{E}_i(y)\lambda_i \qquad \text{if} \quad \mathcal{E}_k(x) = 0 \quad \text{and}$$

$$\lambda_k > \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{E}_i(y)\lambda_i \geq \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\mathcal{E}_i(y)\lambda_i \qquad \text{if} \quad \mathcal{E}_k(y) = 0.$$

Therefore, in both cases,

$$\lambda_k > \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\mathcal{E}_i(y)\lambda_i.$$

Applying Theorem 2 again, we have that $\mathcal{E}_n(x \circ y) = \mathcal{E}_n(x)\mathcal{E}_n(y)$ for all $n \in I\!N$. Finally, the associativity of $\mathcal{E}$ follows from Theorem 1.

3. Remarks

1. If $\lambda = (\lambda_n) \in I\!F$, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n) \in \mathcal{A}(\lambda)$ is the regular algorithm and

$$x \circ y = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n(x)\mathcal{E}_n(y)\lambda_n \qquad (x, y \in [0, L(\lambda)]) \tag{8}$$

then $([0, L(\lambda)], \circ)$ is an *abelian semigroup* with unit element $L(\lambda)$ in which $x \circ x = x$ for all $x \in [0, L(\lambda)]$, that is, each element is *idempotent*. While the semigroup operation $\circ$ is continuous in bot variables at all but at most countably many points and also it is "strictly monotonic" in some sense (see [4]) in both variables, *it cannot be representable in the form*

$$x \circ y = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)) \qquad (x, y \in [0, L(\lambda)])$$

with some injective function $\varphi\colon [0, L(\lambda)] \to I\!R$ (cf. Aczél [1] or Craigen–Páles [2]) because of the idempotency.

2. *Let* $\lambda = (\lambda_n) \in I\!F$ *and* $\mathcal{E}' = (\mathcal{E}'_n)$ *be the anti-regular algorithm with respect to it*. We shall show that $\mathcal{E}'$ *is associative, i.e., the operation*

$$x * y = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}'_n(x)\mathcal{E}'_n(y)\lambda_n \qquad (x, y \in [0, L(\lambda)])$$

is associative, if and only if,

$$\mathcal{E}_n(x + y - x \circ y) + \mathcal{E}_n(x \circ y) = \mathcal{E}_n(x) + \mathcal{E}_n(y) \tag{9}$$

holds for all $n \in I\!N$; $x, y \in [0, L(\lambda)]$ *where* $\circ$ *is the associative operation defined by* (8) *and* $(\mathcal{E}_n)$ *is the regular algorithm.*

Indeed, the connection

$$\mathcal{E}'_n(x) = 1 - \mathcal{E}_n(L(\lambda) - x) \qquad (n \in I\!N;\ x \in [0, L(\lambda)]) \tag{10}$$

between the regular and anti-regular algorithms can easily be seen. On the other hand, by (10) and (8), we have

$$L(\lambda) - [(L(\lambda) - x) * (L(\lambda) - y)] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n - \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}'_n(L(\lambda) - x)\mathcal{E}'_n(L(\lambda) - y)\lambda_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (1 - \mathcal{E}_n(x))(1 - \mathcal{E}_n(y))]\, \lambda_n = x + y - x \circ y$$

for all $x, y \in [0, L(\lambda)]$. Thus, again by (10),

$$\mathcal{E}_n(x + y - x \circ y) = 1 - \mathcal{E}'_n((L(\lambda) - x) * (L(\lambda) - y)). \tag{11}$$

Therefore, by Theorems 1 and 3, (11) and (10) imply that $(\mathcal{E}'_n)$ is associative, if and only if,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(x + y - x \circ y) &= 1 - \mathcal{E}'_n(L(\lambda) - x)\mathcal{E}'_n(L(\lambda) - y) = \\ &= 1 - (1 - \mathcal{E}_n(x))(1 - \mathcal{E}_n(y)) = \\ &= \mathcal{E}_n(x) + \mathcal{E}_n(y) - \mathcal{E}_n(x)\mathcal{E}_n(y) = \\ &= \mathcal{E}_n(x) + \mathcal{E}_n(y) - \mathcal{E}_n(x \circ y) \end{aligned}$$

for all $x, y \in [0, L(\lambda)]$; $n \in I\!N$ which proves (9).

3. The existence of associative algorithms different from the regular one is still unknown. We have only partial results. To present these, we need the following concept (see [4]): If $\lambda = (\lambda_n) \in I\!F$, $a \in [0, L(\lambda)]$ and $\mathcal{E}_n(a) = \alpha_n(a)$ for all $(\alpha_n) \in \mathcal{A}(\lambda)$ and $n \in I\!N$ (where $(\mathcal{E}_n)$ is the regular algorithm), we say that the number a is *uniquely representable*. The set of uniquely representable numbers will be denoted by $U(\lambda)$.

(a) *The only associative algorithm with respect to the interval filling sequence* $\lambda = \left(\frac{1}{2^n}\right)$ *is the regular one.*

Indeed, suppose that $(\alpha_n) \in \mathcal{A}(\lambda)$, (α_n) is associative and $(\alpha_n(x)) \neq (\mathcal{E}_n(x))$ for some $x \in [0,1]$. Then, by the definition of the regular algorithm, there exists $n_0 \in I\!N$ such that $\alpha_i(x) = \mathcal{E}_i(x)$ for $i \in \{1,\dots,n_0-1\}$ and $\alpha_{n_0}(x) = 0$, $\mathcal{E}_{n_0}(x) = 1$. Therefore

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x)\frac{1}{2^i}$$

implies that

$$\frac{1}{2^{n_0}} = \sum_{i=n_0+1}^{\infty} (\alpha_i(x) - \mathcal{E}_i(x))\frac{1}{2^i}.$$

This holds only if $\alpha_i(x) - \mathcal{E}_i(x) = 1$, that is, $\alpha_i(x) = 1$ and $\mathcal{E}_i(x) = 0$ for $i > n_0$, so $x = \sum_{i=1}^{n_0-1} \mathcal{E}_i(x)\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n_0}}$. Define the numbers $a = \sum_{i=1}^{n_0-1} \mathcal{E}_i(x)\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \delta_i \frac{1}{2^i}$ and $b = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} (1-\delta_i)\frac{1}{2^i}$ where $\delta_{n_0+i} = 0$ if i is odd and $\delta_{n_0+i} = 1$ if i is even positive integer. Obviously $a, b \in U(\lambda)$ and $a \circ b = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(a)\alpha_n(b)\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n(a)\mathcal{E}_n(b)\frac{1}{2^n} = x$. Thus, applying Theorem 1, we get

$$1 = \alpha_{n_0+1}(x) = \alpha_{n_0+1}(a \circ b) = \alpha_{n_0+1}(a)\alpha_{n_0+1}(b) = \delta_{n_0+1}(1-\delta_{n_0+1}) = 0$$

which is a contradiction.

(b) *IF* $\lambda = (\lambda_n) \in IF$ *and* $]0, L(\lambda)[\, \cap U(\lambda) \neq \emptyset$, *that is, there exists uniquely representable number in the interior of* $[0, L(\lambda)]$, *then the anti-regular algorithm* $\mathcal{E}' = (\mathcal{E}'_n)$ *is not associative.*

Indeed, suppose in the contrary that $\mathcal{E}'$ is associative. Then, by our second remark, we have (9). Let furthermore $x \in]0, L(\lambda)[\, \cap U(\lambda)$ and $N \in I\!N$ such that $\mathcal{E}_N(x) = 0$ and $\mathcal{E}_{N+1}(x) = 1$. The numbers

$$u = \sum_{i=N+1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i \quad \text{and} \quad v = \sum_{i=N+1}^{\infty} (1-\mathcal{E}_i(x))\lambda_i$$

are uniquely representable again,

$$u \circ v = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}'_n(u)\mathcal{E}'_n(v)\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n(u)\mathcal{E}_n(v)\lambda_n = $$
$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathcal{E}_n(x)(1-\mathcal{E}_n(x))\lambda_n = 0$$

and $u+v = \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n = L_{n+1}(\lambda)$. Thus, by (9),

$$\mathcal{E}_n(L_{N+1}(\lambda)) = \mathcal{E}_n(u+v-u\circ v) + \mathcal{E}_n(u\circ v) = \mathcal{E}_n(u) + \mathcal{E}_n(v) = \begin{cases} 0, & \text{if } n \le N \\ 1, & \text{if } n > N. \end{cases}$$

Taking into consideration the definition of the regular algorithm, this implies that $L_{N+1}(\lambda) < \lambda_N$ which contradicts the interval fillingness of (λ_n).

References

[1] Aczél, J., Lecetures on Functional Equations and Their Applications, *Academic Press, New York and London*, 1966.

[2] Craigen, R. and Páles, Zs., The associativity equation revisited, *Aequationes Math.*, **37** (1989), 306–312.

[3] Daróczy, Z., Járai, A. and Kátai, I., Intervallfüllende Folgen und volladditive Funktionen, *Acta Sci. Math.*, **50** (1986), 337–350.

[4] Daróczy, Z., Maksa, Gy. and Szabó, T., Some regularity properties of algorithms and additive functions with respect to them, *Aequationes Math.*, **41** (1991), 111–118.

Gyula Maksa
Lajos Kossuth University
Institute of Mathematics and Informatics
4010 Debrecen P.O. Box 12.
Hungary
E-mail: maksa@math.klte.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 39–47*

ON THE ASSOCIATIVITY OF ALGORITHMS

Tibor Farkas (KLTE, Hungary)

Abstract: In this paper we extend the concept of the associative algorithm to the case of interval filling sequences of order N. We show that the regular algorithm is associative, and, answering a question of Gy. Maksa, we prove that there exist interval filling sequences for which the regular algorithm is not the only associative one.

1. Introduction

Throughout this paper let N be a fixed positive integer and $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N\}$. Let Λ be the set of the strictly decreasing sequences $\lambda = (\lambda_n)$ of positive real numbers for which $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$. Let $L(\lambda) = N \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$. A sequence $(\lambda_n) \in \Lambda$ is called an *interval filling sequence of order* N if, for any $x \in [0, L(\lambda)]$, there exists a sequence (δ_n) such that $\delta_n \in \mathcal{N}$ for all $n \in I\!N$ (the set of all positive integers) and $x = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \lambda_n$. This concept has been introduced in Daróczy–Járai–Kátai [1] for $N = 1$ and in Kovács–Maksa [2] in the general case. It is known also from [2] that $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ is an interval filling sequence of order N if and only if $\lambda_n \le L_{n+1}(\lambda)$ for all $n \in I\!N$ where $L_m(\lambda) = N \cdot \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i$, $(m \in I\!N)$. The set of the interval filling sequences of order N will be denoted by IF_N.

The notions of algorithms, associative algorithms, the regular, the quasi-regular and the anti-regular algorithm were introduced in [3], [4] and [5] for interval filling sequences of order 1, now we will extend them to the case of arbitrary $N \in I\!N$.

2. The associativity of the regular algorithm

Definition. An *algorithm* (with respect to $\lambda = (\lambda_n) \in IF_N$) is defined as a sequence of functions $\alpha_n \colon [0, L(\lambda)] \to \mathcal{N}$ $(n \in I\!N)$ for which

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda_n \qquad (x \in [0, L(\lambda)]).$$

We denote the set of algorithms (with respect to $\lambda = (\lambda_n) \in IF_N$) by $\mathcal{A}_N(\lambda)$.

It is easy to prove that $\mathcal{A}_N(\lambda) \neq \emptyset$ for all $\lambda \in IF_N$, namely if $\lambda = (\lambda_n) \in IF_N$, $x \in [0, L(\lambda)]$, $n \in I\!N$ and

$$\mathcal{E}_n(x) = \max\Big\{ j \in \mathcal{N} \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i + j \cdot \lambda_n \leq x \Big\},$$

or

$$\mathcal{E}_n^\star(x) = \max\Big\{ j \in \mathcal{N} \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}_i^\star(x)\lambda_i + j \cdot \lambda_n < x \Big\},$$

or

$$\mathcal{E}_n'(x) = \min\Big\{ j \in \mathcal{N} \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{E}_i'(x)\lambda_i + j \cdot \lambda_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} N\lambda_i \geq x \Big\},$$

then $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n) \in \mathcal{A}_N(\lambda)$, $\mathcal{E}^\star = (\mathcal{E}_n^\star) \in \mathcal{A}_N(\lambda)$ and $\mathcal{E}' = (\mathcal{E}_n') \in \mathcal{A}_N(\lambda)$. The algorithms $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^\star$ and $\mathcal{E}'$ are called *regular (or greedy)*, *quasi-regular* and *anti-regular (or lazy)* algorithms, respectively.

Definition. Let $\lambda = (\lambda_n) \in IF_N$ and $(\alpha_n) \in \mathcal{A}_N(\lambda)$. Then the algorithm (α_n) is *associative* if the binary operation $\circ\colon [0, L(\lambda)] \times [0, L(\lambda)] \to [0, L(\lambda)]$ defined by

$$x \circ y = \sum_{n=1}^{\infty} \min\{\alpha_n(x), \alpha_n(y)\}\lambda_n \qquad (x, y \in [0, L(\lambda)]) \tag{1}$$

is associative, that is,

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \qquad (x, y, z \in [0, L(\lambda)]).$$

Remark. This is a generalization of the notion defined by Gy. Maksa [5], because in the set $\{0, 1\}$ the minimum of any two elements is equal to the product of them.

Obviously, the operation $\circ$ is commutative, i.e., $x \circ y = y \circ x$ for all $x, y \in [0, L(\lambda)]$, idempotent, i.e., $x \circ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)^2\lambda_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda_n = x$ for all $x \in [0, L(\lambda)]$ and $x \circ y \leq \min\{x, y\}$ for all $x, y \in [0, L(\lambda)]$. Now we will characterize the associative algorithms.

Theorem 1. *Let $\lambda = (\lambda_n) \in IF_N$, $\alpha = (\alpha_n) \in \mathcal{A}_N(\lambda)$. Then α is associative if and only if*

$$\alpha_n(x \circ y) = \min\{\alpha_n(x), \alpha_n(y)\} \qquad (n \in I\!N;\; x, y \in [0, L(\lambda)]). \tag{2}$$

Proof. Suppose that (2) holds. Then, for all $x, y, z \in [0, L(\lambda)]$, we have

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z &= \sum_{n=1}^{\infty} \min\{\alpha_n(x \circ y), \alpha_n(z)\}\lambda_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \min\big\{\min\{\alpha_n(x), \alpha_n(y)\}, \alpha_n(z)\big\}\lambda_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \min\{\alpha_n(x), \alpha_n(y), \alpha_n(z)\}\lambda_n = \cdots = x \circ (y \circ z) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \min\big\{\alpha_n(x), \min\{\alpha_n(y), \alpha_n(z)\}\big\}\lambda_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \min\{\alpha_n(x), \alpha_n(y \circ z)\}\lambda_n = x \circ (y \circ z).\end{aligned}$$

On the other hand, suppose that α is associative. Then, by idempotency, $x \circ y = (x \circ x) \circ y = x \circ (x \circ y)$, that is,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x \circ y)\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \min\{\alpha_n(x), \alpha_n(x \circ y)\}\lambda_n \qquad (x, y \in [0, L(\lambda)])$$

whence

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n(x \circ y) - \min\{\alpha_n(x), \alpha_n(x \circ y)\}\big)\lambda_n \qquad (x, y \in [0, L(\lambda)]),$$

and since the coefficient of λ_n is non-negative for all $n \in I\!N$, we obtain that $\alpha_n(x \circ y) - \min\{\alpha_n(x), \alpha_n(x \circ y)\} = 0$, that is,

$$\alpha_n(x \circ y) = \min\{\alpha_n(x), \alpha_n(x \circ y)\} \qquad (n \in I\!N;\ x, y \in [0, L(\lambda)]) \tag{3}$$

and, by interchanging x and y, we get

$$\alpha_n(x \circ y) = \min\{\alpha_n(y), \alpha_n(x \circ y)\} \qquad (n \in I\!N;\ x, y \in [0, L(\lambda)]). \tag{4}$$

Now (3) and (4) yield

$$\alpha_n(x \circ y) \le \min\{\alpha_n(x), \alpha_n(y)\} \tag{5}$$

for all $x, y \in [0, L(\lambda)]$ and $n \in I\!N$. Therefore, by (1),

$$\begin{aligned}0 = x \circ y - (x \circ y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \min\{\alpha_n(x), \alpha_n(y)\}\lambda_n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x \circ y)\lambda_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \big(\min\{\alpha_n(x), \alpha_n(y)\} - \alpha_n(x \circ y)\big)\lambda_n,\end{aligned}$$

and, because of (5), we have the non-negativity of the coefficients, so (2) holds. Thus the proof is complete.

The following characterization of the regular algorithm is the other tool for proving the associativity of the regular algorithm.

Theorem 2. *Let $\lambda = (\lambda_n) \in IF_N$ and $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda_n$ with some $(t_n)\colon I\!N \to \mathcal{N}$. Then $t_n = \mathcal{E}_n(x)$ for all $n \in I\!N$, if and only if,*

$$k \in I\!N \text{ and } t_k < N \text{ imply that } \lambda_k > \sum_{i=k+1}^{\infty} t_i \lambda_i. \tag{6}$$

Proof. The "only if" part of the assertion is trivial.

For the "if" part, suppose (6) to be hold. Furthermore suppose, in the contrary, that $t_{n_0} \neq \mathcal{E}_{n_0}(x)$ for some $n_0 \in I\!N$ while $t_i = \mathcal{E}_i(x)$, $i \in \{1, \dots, n_0-1\}$ ($\{1, \dots, n_0-1\} = \emptyset$ if $n_0 = 1$). Because of the definition of the regular algorithm (the greedy property) we have $t_{n_0} < \mathcal{E}_{n_0}(x)$, so $t_{n_0} < N$, and by (6), $\lambda_{n_0} > \sum_{i=n_0+1}^{\infty} t_i \lambda_i$. Thus

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^{\infty} t_i \lambda_i < \sum_{i=1}^{n_0} t_i \lambda_i + \lambda_{n_0} = \sum_{i=1}^{n_0-1} t_i \lambda_i + (t_{n_0}+1)\lambda_{n_0} \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{n_0-1} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i + \mathcal{E}_{n_0}(x)\lambda_{n_0} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i = x, \end{aligned}$$

which is a contradiction. Thus the theorem is proved.

Now we are ready to prove the following

Theorem 3. *The regular algorithm $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)$, with respect to any interval filling sequence $\lambda = (\lambda_n)$, is associative.*

Proof. We shall prove that

$$\min\{\mathcal{E}_n(x), \mathcal{E}_n(y)\} = \mathcal{E}_n(x \circ y) \qquad (n \in I\!N;\ x, y \in [0, L(\lambda)]),$$

that is, for $t_n = \min\{\mathcal{E}_n(x), \mathcal{E}_n(y)\}$ (6) holds. Let $x, y \in [0, L(\lambda)]$, $k \in I\!N$ and $\min\{\mathcal{E}_k(x), \mathcal{E}_k(y)\} < N$. Then, without loss of generality we can assume that $\mathcal{E}_k(x) < N$, from which

$$\lambda_k > \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{E}_i(x)\lambda_i \geq \sum_{i=k+1}^{\infty} \min\{\mathcal{E}_i(x), \mathcal{E}_i(y)\}\lambda_i.$$

3. Miscellaneous theorems

Theorem 4. *Let $\lambda = (\lambda_n) \in IF_N$. The quasi-regular algorithm $\mathcal{E}^\star$ with respect to λ is not associative.*

Proof. We will define two sequences $(\alpha_n), (\beta_n) \in \mathcal{N}^{I\!N}$ which are quasi-regular, but $(\min\{\alpha_n, \beta_n\})$ is not quasi-regular. It is clear that there exists a subsequence (l_n) of the increasing sequence of natural numbers for which the following three conditions hold:

$$(a) \qquad l_1 = 2,$$

$$(b) \qquad \lambda_{l_n} + \sum_{i=l_{n+1}}^{\infty} \lambda_i < \lambda_{l_n - 1} \qquad (n \in I\!N),$$

and,

$$(c) \qquad l_{n+1} \geq l_n + 2 \qquad (n \in I\!N).$$

And for such a sequence (l_n) there exists another subsequence (m_n) of the increasing sequence of natural numbers for which the following three conditions hold:

$$(d) \qquad m_1 = 2,$$

$$(e) \qquad \lambda_{m_n} + \sum_{i=m_{n+1}}^{\infty} \lambda_i < \lambda_{m_n - 1} \qquad (n \in I\!N),$$

and,

$$(f) \qquad l_i \neq m_j \qquad \text{if } i, j > 1.$$

Now let

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{if there exists } i \in I\!N \text{ for which } n = l_i \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\beta_n = \begin{cases} 1, & \text{if there exists } i \in I\!N \text{ for which } n = m_i \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Condition (b) implies the regularity of (α_n), since if $k \in I\!N$ and n is the minimal index for which $k < l_n$ then

$$\lambda_k \geq \lambda_{l_n - 1} > \lambda_{l_n} + \sum_{i=l_{n+1}}^{\infty} \lambda_i \geq \lambda_{l_n} + \lambda_{l_{n+1}} + \lambda_{l_{n+2}} + \cdots = \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i \lambda_i,$$

so (6) holds for $(t_n) = (\alpha_n)$. Since $\alpha_n \neq 0$ for infinitely many indices n, we obtain that (α_n) is quasi-regular. The quasi-regularity of (β_n) can be shown in the same way. But $(\min\{\alpha_n, \beta_n\})$ is not a quasi-regular sequence, since it is equal to $(0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$.

Theorem 5. *Let $\lambda = (\lambda_n) \in IF_N$. The anti-regular algorithm $\mathcal{E}'$ with respect to λ is not associative.*

Proof. Our purpose is to define two sequences $(\alpha_n), (\beta_n) \in \mathcal{N}^{I\!N}$ which are anti-regular, but $(\min\{\alpha_n, \beta_n\})$ is not anti-regular. Instead of this, it is obviously enough to define two sequences $(\alpha_n), (\beta_n) \in \mathcal{N}^{I\!N}$ which are regular, but $(\max\{\alpha_n, \beta_n\})$ is not regular. We will use this method.

In the proof we distinguish two cases:

Case 1. *There exists $m \in I\!N$ such that $\mathcal{E}_k^\star(\lambda_m) < N$ for infinitely many values of index k.*

Then let $H = \{k \in I\!N \mid k > m \text{ and } \mathcal{E}_k^\star(\lambda_m) < N\}$. Let A and B be subsets of $I\!N$ for which

$$A \cup B = I\!N, \qquad A \cap B = \emptyset,$$

$$A \cap \{k \in I\!N \mid \mathcal{E}_k^\star(\lambda_m) \neq 0\} \text{ and } B \cap \{k \in I\!N \mid \mathcal{E}_k^\star(\lambda_m) \neq 0\} \text{ are infinite sets,}$$

$$(i \in A \text{ and } i+1 \in B) \text{ or } (i \in B \text{ and } i+1 \in A) \Longrightarrow i \in H.$$

The existence of such sets A and B is clear. Now let

$$\alpha_k = \begin{cases} \mathcal{E}_k^\star(\lambda_m), & \text{if } k \in A \\ 0, & \text{if } k \in B \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \mathcal{E}_k^\star(\lambda_m), & \text{if } k \in B \\ 0, & \text{if } k \in A \end{cases}$$

for all $k \in I\!N$. The regularity of (α_n) and (β_n) follows from the definition of $(\mathcal{E}_n^\star(\lambda_m))$ and the infinite cardinality of $A \cap \{k \in I\!N \mid \mathcal{E}_k^\star(\lambda_m) \neq 0\}$ and $B \cap \{k \in I\!N \mid \mathcal{E}_k^\star(\lambda_m) \neq 0\}$. The "pointwise" maximum of (α_n) and (β_n) is not regular since it is equal to $(\mathcal{E}_n^\star(\lambda_m))$.

Case 2. *For every $n \in I\!N$ $\mathcal{E}_k^\star(\lambda_n) = N$ for all but finitely many values of index k.*

Then, for an arbitrary positive integer K, if m denotes the maximal index for which $\mathcal{E}_m^\star(\lambda_K) < N$ then $\lambda_m = L_{m+1}$ follows from the the quasi-regularity of $\mathcal{E}^\star$. Thus we obtain that $H = \{n \in I\!N \mid \lambda_n = L_{n+1}\}$ is an infinite set. Let A and B be subsets of $I\!N$ for which

$$A \cup B = \{n \in I\!N \mid n > \min H\}, \qquad A \cap B = \emptyset,$$

$$(i \in A \text{ and } i+1 \in B) \text{ or } (i \in B \text{ and } i+1 \in A) \Longleftrightarrow i \in H \setminus \{\min H\}.$$

The existence of such sets A and B is clear. Now let

$$\alpha_k = \begin{cases} N, & \text{if } k \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} N, & \text{if } k \in B \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

for all $k \in I\!N$. Then $(\max\{\alpha_n, \beta_n\}) = (\mathcal{E}_n^\star(\lambda_{\min H}))$, which is not a regular sequence, but the regularity of (α_n) and (β_n) follows from the quasi-regularity of $(\mathcal{E}_n^\star(\lambda_{\min H}))$.

Theorem 6. *In the case of* $(\lambda_n) = \left(\frac{1}{(N+1)^n}\right) \in I\!F_N$ *the only associative algorithm is the regular one.*

Proof. Let $x \in [0, L(\lambda)]$. If $\mathcal{E}_n(x) = 0$ except of a finite set of indices n then x will be called a *finite* number. In the case of $(\lambda_n) = \left(\frac{1}{(N+1)^n}\right)$ if an $x \in [0, L(\lambda)]$ has more than one representations of the form

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \lambda_n \qquad (\delta_n \in \mathcal{N} \text{ for all } n \in I\!N)$$

then x is a finite number,

$$x = \sum_{n=1}^{m} \mathcal{E}_n(x)\lambda_n \qquad \text{where } \mathcal{E}_m(x) \neq 0,$$

and x has exactly one representation different from the regular one:

$$x = \sum_{n=1}^{m-1} \mathcal{E}_n(x)\lambda_n + (\mathcal{E}_m(x) - 1)\lambda_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} N \cdot \lambda_n.$$

We will show that if $\alpha = (\alpha_n)$ is an associative algorithm and x is a finite number then $\alpha_n(x) = \mathcal{E}_n(x)$ for all $n \in I\!N$. Let $x = \sum_{n=1}^{m} \mathcal{E}_n(x)\lambda_n$ where $\mathcal{E}_m(x) \neq 0$. Then

$$x_1 = x + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{m+2n-1} \quad \text{and} \quad x_2 = x + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{m+2n}$$

are uniquely representable numbers, so if $\in I\!N$ and $j \in \{1, 2\}$ then

$$\alpha_n(x_j) = \begin{cases} \mathcal{E}_n(x), & \text{if } n \leq m \\ 1, & \text{if } n > m \ \text{ and } \ n - m - j \text{ is even} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is clear that $x = x_1 \circ x_2$, thus

$$\alpha_n(x) = \alpha_n(x_1 \circ x_2) = \min\{\alpha_n(x_1), \alpha_n(x_2)\} = \mathcal{E}_n(x) \qquad (n \in I\!N).$$

Theorem 7. *Let $\lambda = (\lambda_n) \in IF_N$ for which there exists $M \in I\!N, M > 1$ such that $\lambda \setminus \{\lambda_M\}$ is still an interval filling sequence of order N. Then the regular algorithm with respect to λ is not the only associative one.*

Proof. Let $\mathcal{E}$ denote the regular algorithm with respect to $\lambda \setminus \{\lambda_M\}$, and let $\diamond$ be the operation defined by $\mathcal{E}$. We define an associative algorithm α with respect to λ which is different from the regular one. If $x \in [0, L(\lambda)]$ then let

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} \max\{k \in \mathcal{N} \mid \quad k\lambda_M \leq x\}, & \text{if } n = M \\ \mathcal{E}_{\varphi(n)}\big(x - \alpha_M(x)\lambda_M\big), & \text{if } n \neq M, \end{cases}$$

where $\varphi\colon I\!N \setminus \{M\} \to I\!N$,

$$\varphi(n) = \begin{cases} n, & \text{if } n < M \\ n-1, & \text{if } n > M. \end{cases}$$

The condition that $\lambda \setminus \{\lambda_M\}$ is an interval filling sequence implies that α is an algorithm. This algorithm is obviously different from the regular one since it "begins with index M". If $\circ$ denotes the operation defined by α then we have

$$x \circ y = \min\{\alpha_M(x), \alpha_M(y)\} \cdot \lambda_M + \big(x - \alpha_M(x)\lambda_M\big) \diamond \big(y - \alpha_M(y)\lambda_M\big). \tag{7}$$

Furthermore, we know that

$$\big(x - \alpha_M(x)\lambda_M\big) \diamond \big(y - \alpha_M(y)\lambda_M\big) \leq \min\{x - \alpha_M(x)\lambda_M, y - \alpha_M(y)\lambda_M\}. \tag{8}$$

Our purpose is to prove that (2) holds for α. It is obviously true for $n = M$, and if $n \neq M$ then with the help of (7) and (8) we obtain

$$\begin{gathered} \alpha_n(x \circ y) = \\ = \alpha_n\big(\min\{\alpha_M(x), \alpha_M(y)\} \cdot \lambda_M + (x - \alpha_M(x)\lambda_M) \diamond (y - \alpha_M(y)\lambda_M\big) = \\ = \mathcal{E}_{\varphi(n)}\big((x - \alpha_M(x)\lambda_M) \diamond (y - \alpha_M(y)\lambda_M)\big) = \\ = \min\big\{\mathcal{E}_{\varphi(n)}\big(x - \alpha_M(x)\lambda_M\big), \mathcal{E}_{\varphi(n)}\big(y - \alpha_M(y)\lambda_M\big)\big\} = \\ = \min\{\alpha_n(x), \alpha_n(y)\}. \end{gathered}$$

References

[1] Daróczy, Z., Járai, A. and Kátai, I., Intervallfüllende Folgen und volladditive Funktionen, *Acta Sci. Math.*, **50** (1986), 337–350.

[2] Kovács, B. and Maksa, Gy., Interval-filling sequences of order N and a representation of real numbers in canonical number systems, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, **39** (1991), 305–313.

[3] Daróczy, Z., Maksa, Gy. and Szabó, T., Some regularity properties of algorithms and additive functions with respect to them, *Aequationes Math.*, **41** (1991), 111–118.

[4] Szabó, T., Triadditive functions, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comput.*, **13** (1992), 25–33.

[5] Maksa, Gy., An associative algorithm, *Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae* (to appear)

Tibor Farkas
Lajos Kossuth University
Institute of Mathematics and Informatics
4010 Debrecen P.O. Box 12.
Hungary
E-mail: farkas@math.klte.hu

RECURSIVE FORMULAE FOR SPECIAL CONTINUED FRACTION CONVERGENTS

Ferenc Mátyás (EKTF, Hungary)

Abstract: Let α and β be the zeros of the polynomial $x^2 - Ax - B$, where $A \in Z \setminus \{0\}, B \in \{1, -1\}, D = A^2 + 4B > 0, |\alpha| > |\beta|$ and D is not a square number. In this paper some recursive formulae are given for the continued fraction convergents to α.

1. Introduction

Let the sequence $R = \{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ be defined for $n \geq 0$ by the recursion

$$R_{n+2} = AR_{n+1} + BR_n, \tag{1}$$

where $A, B \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, R_0 = 0, R_1 = 1, D = A^2 + 4B > 0$ and D is not a perfect square. If $R_0 = R_1 = 1$ then the terms of sequence R are denoted by $R_n^\star$, while if $A = B = R_1 = 1$ and $R_0 = 0$ then the terms of sequence R are the Fibonacci numbers, which are denoted by F_n.

The polynomial $f(x) = x^2 - Ax - B$ is called to be the characteristic polynomial of the sequence R, and the zeros of $f(x)$ are denoted by α and β. By our condition, the zeros α and β are irrationals and we suppose that $|\alpha| > |\beta|$. It is known that for $n \geq 0$

$$R_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{and} \quad R_n^\star = \frac{(1-\beta)\alpha^n - (1-\alpha)\beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{2}$$

from which

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}}{R_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}^\star}{R_n^\star} = \alpha$$

immediately follows.

P. Kiss [2] proved that

$$\left|\alpha - \frac{R_{n+1}}{R_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{D}R_n^2}$$

Research supported by the Hungarian OTKA Foundation, No. T 020295

holds for infinitely many positive integer n if and only if $|B|=1$, and in this case all of the rational solutions p/q of the inequality

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{D}q^2}$$

have the form $p/q=R_{n+1}/R_n$. Because of this fact, in this paper we deal with only the case $|B|=1$.

The connection between diophantine approximation and continued fraction convergents is well-known (see [1]). The simple periodic continued fraction expansion of α is denoted by $[a_0,a_1,\dots,\overline{a_k,\dots,a_m}]$, where $[\overline{a_k,\dots,a_m}]$ denotes the minimal periodic part, while the n^{th} convergent to α by $r_n(\alpha)$.

G. J. Rieger [4] has created a special function having the zero $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ and he has proved that the Newton approximants x_n to this zero satisfy the recursive formula

$$x_{n+1}=\frac{x_n+1}{x_n+2}\qquad (x_0=0, n\geq 0),$$

and $x_n=r_{2n}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. Since $r_{2n}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}$, thus G. J. Rieger obtained a recursive formula for the (even) continued fraction convergents to $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, which is in close relation with the Fibonacci numbers. On the other hand, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ is a zero of the characteristic polynomial x^2-Ax-B of sequence R defined in (1) if $A=-1$ and $B=1$.

The aim of this paper is to generalize the result of G. J. Rieger for $A\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ and $|B|=1$. We give some recursive formulae for the continued fraction convergents $r_n(\alpha)$ to α.

2. Results

It is known that $r_0(\alpha)<r_2(\alpha)<r_4(\alpha)<\ldots<\alpha<\ldots<r_5(\alpha)<r_3(\alpha)<r_1(\alpha)$ (see [1]), therefore we are looking for recursive formulae for the odd and for the even convergents to α.

Theorem 1. *Let $B=1$ in (1) and let the approximant x_{n+1} be defined by the recursive formula*

$$x_{n+1}=\frac{(A^2+1)x_n+A}{Ax_n+1}\qquad (n\geq 0),$$

let α and β denote the zeros of the polynomial x^2-Ax-1, where $|\alpha|>|\beta|$.

(1.) Let $A\geq 1$.

(a) If $x_0=\frac{A^2+1}{A}$, then $x_n=r_{2n+1}(\alpha)\qquad (n\geq 0)$.

(b) If $x_0 = A$*, then* $x_n = r_{2n}(\alpha) \qquad (n \ge 0)$.

(2.) Let $A < -1$.

(a) If $x_0 = A$*, then* $x_n = r_{2n+1}(\alpha) \qquad (n \ge 0)$.

(b) If $x_0 = \frac{A^2+1}{A}$*, then* $x_n = r_{2n+2}(\alpha) \qquad (n \ge 0)$.

Remark. If $A = -1$ and $B = 1$ then $\alpha = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ and $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. The cited paper of G. J. Rieger [4] investigated exactly the even convergents to this β.

Theorem 2. *Let* $B = -1$ *in (1) and let the approximant* x_{n+1} *be defined by the recursive formula*

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n - 1}{x_n} \quad (n \ge 0),$$

let α *and* β *denote the zeros of the polynomial* $x^2 - Ax + 1$*, where* $|\alpha| > |\beta|$.

(1.) Let $A \ge 3$.

(a) If $x_0 = A$*, then* $x_n = r_{2n+1}(\alpha) \qquad (n \ge 0)$.

(b) If $x_0 = A - 1$*, then* $x_n = r_{2n}(\alpha) \qquad (n \ge 0)$.

(2.) Let $A \le -3$.

(a) If $x_0 = A - 1$*, then* $x_n = r_{2n+1}(\alpha) \qquad (n \ge 0)$.

(b) If $x_0 = A$*, then* $x_n = r_{2n}(\alpha) \qquad (n \ge 0)$.

Further on, using the known Newton approximation to approximate the root α of the equation $x^2 - Ax - B = 0 \quad (B = \pm 1)$, we will investigate the connection between the convergents to α and the Newton approximants.

Theorem 3. *Let* $f(x) = x^2 - Ax - B \quad (B = \pm 1, A^2 + 4B > 0)$ *and let* α *and* β *denote the root of* $f(x) = 0$ *with the condition* $|\alpha| > |\beta|$*. Then the Newton iteration gives the formula*

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + B}{2x_n - A}.$$

(1.) Let $B = 1$ *and* $x_0 = \frac{A^2+1}{A}$.

(a) If $A \ge 1$*, then* $x_n = r_{2^{n+1}-1}(\alpha) \qquad (n \ge 0)$.

(b) If $A < -1$*, then* $x_n = r_{2^{n+1}}(\alpha) \qquad (n \ge 0)$.

(2.) Let $B = -1$ *and* $x_0 = A$.

(a) If $A \ge 3$*, then* $x_n = r_{2^{n+1}-1}(\alpha) \qquad (n \ge 0)$.

(b) If $A \le -3$*, then* $x_n = r_{2^{n+1}-2}(\alpha) \qquad (n \ge 0)$.

3. Proofs

Before the proofs of our theorems, we need the following lemma.

Lemma. *Let the sequence R be defined by (1), where $B=\pm1$. Then for all $k>0$*

$$\frac{\left(\frac{R_{k+1}}{R_k}\right)^2+B}{2\frac{R_{k+1}}{R_k}-A}=\frac{R_{2k+1}}{R_{2k}}.$$

Proof. We are going to show the proof only in the case $B=1$, because the proof would be very similar if $B=-1$. Using (1), (2) and $\alpha\beta=-1$, one can verify the following:

$$\frac{\left(\frac{R_{k+1}}{R_k}\right)^2+1}{2\frac{R_{k+1}}{R_k}-A}=\frac{R_{k+1}^2+R_k^2}{2R_{k+1}R_k-AR_k^2}=$$

$$\frac{R_{k+1}^2+R_k^2}{R_k\left(R_{k+1}-AR_k\right)+R_kR_{k+1}}=\frac{R_{k+1}^2+R_k^2}{R_k\left(R_{k-1}+R_{k+1}\right)}=$$

$$\frac{\alpha^{2k+2}+\beta^{2k+2}-2\alpha^{k+1}\beta^{k+1}+\alpha^{2k}+\beta^{2k}-2\alpha^k\beta^k}{\alpha^{2k-1}+(-1)^k(\alpha+\beta)+\alpha^{2k+1}+(-1)^{k+1}(\alpha+\beta)+\beta^{2k-1}+\beta^{2k+1}}=$$

$$\frac{\alpha^{2k+1}(\alpha+\frac{1}{\alpha})+\beta^{2k+1}(\beta+\frac{1}{\beta})}{\alpha^{2k}(\frac{1}{\alpha}+\alpha)+\beta^{2k}(\frac{1}{\beta}+\beta)}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^{2k+1}-\beta^{2k+1})}{(\alpha-\beta)(\alpha^{2k}-\beta^{2k})}=\frac{R_{2k+1}}{R_{2k}}.$$

This completes the proof.

In the proofs of our theorems we omit the numerical calculation of the continued fraction expansions and the convergents. For the calculations we used the general algorithms that can be found in [1].

Proof of Theorem 1. First we deal with the case (1.) Now $\alpha=\frac{A+\sqrt{A^2+4}}{2}=[\overline{A}]$ and so the n^{th} convergent to α is

$$r_n(\alpha)=\frac{R_{n+2}}{R_{n+1}}\qquad(n=0,1,2,\dots),\tag{3}$$

that is, the odd and the even convergents are

$$r_{2n+1}(\alpha)=\frac{R_{2n+3}}{R_{2n+2}}\quad\text{and}\quad r_{2n}(\alpha)=\frac{R_{2n+2}}{R_{2n+1}}.\tag{4}$$

(These can be easily verified or see [2].)
The cases (a) and (b) will be proved by induction on n. By (3) and (1), in (a)

$r_1(\alpha) = \frac{R_3}{R_2} = \frac{A^2+1}{A} = x_0$, while in (b) $r_0(\alpha) = \frac{R_2}{R_1} = \frac{A}{1} = x_0$. Let us suppose that (a) and (b) hold for some $n \geq 0$. Then in (a), by (4),

$$x_{n+1} = \frac{(A^2+1)r_{2n+1}(\alpha)+A}{Ar_{2n+1}(\alpha)+1} = \frac{(A^2+1)\frac{R_{2n+3}}{R_{2n+2}}+A}{A\frac{R_{2n+3}}{R_{2n+2}}+1} =$$

$$\frac{A(AR_{2n+3}+R_{2n+2})+R_{2n+3}}{AR_{2n+3}+R_{2n+2}} = \frac{R_{2n+5}}{R_{2n+4}} = r_{2(n+1)+1}(\alpha),$$

and in (b)

$$x_{n+1} = \frac{(A^2+1)r_{2n}(\alpha)+A}{Ar_{2n}(\alpha)+1} = \ldots = \frac{R_{2n+4}}{R_{2n+3}} = r_{2(n+1)}(\alpha).$$

Now, let us see the case (2.), where $\alpha = \frac{A-\sqrt{A^2+4}}{2} = [A-1, 1, -A-1, \overline{-A}]$ and so the n^{th} convergents to α is

$$r_n(\alpha) = \frac{R_{n+1}}{R_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

By (5) and (1), in (a) $r_1(\alpha) = \frac{R_2}{R_1} = \frac{A}{1} = x_0$, while in (b) $r_2(\alpha) = \frac{R_3}{R_2} = \frac{A^2+1}{A} = x_0$. But for $n \geq 0$

$$x_{n+1} = \frac{(A^2+1)r_{2n+1}(\alpha)+A}{Ar_{2n+1}(\alpha)+1} = \ldots = \frac{R_{2n+4}}{R_{2n+3}} = r_{2(n+1)+1}(\alpha)$$

and

$$x_{n+1} = \frac{(A^2+1)r_{2n+2}(\alpha)+A}{Ar_{2n+2}(\alpha)+1} = \ldots = \frac{R_{2n+5}}{R_{2n+4}} = r_{2(n+1)+2}(\alpha)$$

in the case (a) and (b), respectively, which proves the theorem by induction.

Proof of Theorem 2. Similarly, as we have done it in the previous proof, first let us deal with the case (1.). Then $\alpha = \frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2} = [A-1, \overline{1, A-2}]$ and so the odd and the even convergents to α are

$$r_{2n+1}(\alpha) = \frac{R_{n+2}}{R_{n+1}} \quad \text{and} \quad r_{2n}(\alpha) = \frac{R^\star_{n+2}}{R^\star_{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

In the case (a) and (b), by (6) and (1), $r_1(\alpha) = \frac{R_2}{R_1} = \frac{A}{1} = x_0$ and $r_0(\alpha) = \frac{R^\star_2}{R^\star_1} = \frac{A-1}{1} = x_0$, respectively. By induction on n, by (6) and (1), we get that in (a)

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n - 1}{x_n} = \frac{Ar_{2n+1}(\alpha)-1}{r_{2n+1}(\alpha)} = \frac{A\frac{R_{n+2}}{R_{n+1}}-1}{\frac{R_{n+2}}{R_{n+1}}} = \frac{R_{n+3}}{R_{n+2}} = r_{2(n+1)+1}(\alpha),$$

while in (b)

$$x_{n+1} = \frac{Ar_{2n}(\alpha) - 1}{r_{2n}(\alpha)} = \ldots = \frac{R^\star_{n+3}}{R^\star_{n+2}} = r_{2(n+1)}(\alpha).$$

In the case (2.) $\alpha = \frac{A-\sqrt{A^2-4}}{2} = [A, -A-1, \overline{1, -A-2}]$ and so the odd and the even convergents to α are

$$r_{2n+1}(\alpha) = \frac{R^\star_{n+2}}{R^\star_{n+1}} \quad \text{and} \quad r_{2n}(\alpha) = \frac{R_{n+2}}{R_{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Using (7), by induction on n, the proof can be terminated in this case, too.

Proof of Theorem 3. It is known that, under some conditions, the Newton approximants for the zero of the function $f(x)$ can be derived from the equality

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{8}$$

(see [3]). Now, $f(x_0) > 0$ and $f''(x) = 2 > 0$, that is, the approximants converge to α (see [3]), and from (8) we get the following iterative formula

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + B}{2x_n - A}. \tag{9}$$

First, let us see the case (1.), when $A \geq 1$. Then, by (1) and (4), $x_0 = r_1(\alpha) = r_{2^{0+1}-1}(\alpha)$. Supposing that (a) holds for some $n \geq 0$, by (9) and (4),

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - A} = \frac{r_{2^{n+1}-1}(\alpha)^2 + 1}{2r_{2^{n+1}-1}(\alpha) - A} = \frac{\left(\frac{R_{2^{n+1}+1}}{R_{2^{n+1}}}\right)^2 + 1}{2\frac{R_{2^{n+1}+1}}{R_{2^{n+1}}} - A}.$$

From this, applying the Lemma and (4), we get

$$x_{n+1} = \frac{R_{2^{n+2}+1}}{R_{2^{n+2}}} = r_{2^{(n+1)+1}-1}(\alpha).$$

If $A < -1$ then, by (1) and (5), $x_0 = r_2(\alpha) = r_{2^{0+1}}(\alpha)$. By (5) and the Lemma, using induction on n we obtain

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - A} = \frac{r_{2^{n+1}}(\alpha)^2 + 1}{2r_{2^{n+1}}(\alpha) - A} = \frac{\left(\frac{R_{2^{n+1}+1}}{R_{2^{n+1}}}\right)^2 + 1}{2\frac{R_{2^{n+1}+1}}{R_{2^{n+1}}} - A} =$$

$$\frac{R_{2^{n+2}+1}}{R_{2^{n+2}}} = r_{2(n+1)+1}(\alpha).$$

The part (2.) of the theorem can be proved similarly, therefore we omit it.

References

[1] Hardy, G. H. & Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Fifth edition, Oxford, 1979.

[2] Kiss, P., A diophantine approximative property of the second order linear recurrences, *Periodica Mathematica Hungarica*, Vol. **4**, (1980), 281–287.

[3] Ralston, A., A first course in numerical analysis, McGraw–Hill Inc., 1965.

[4] Rieger, G. J., The golden section and Newton approximation, *Fibonacci Quarterly*, Vol. **37**, (1999), 178–179.

AMS Classification Numbers: 11A55, 11B39.

Ferenc Mátyás
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers' Training College
H-3301 Eger, Pf. 43., Hungary
E-mail: matyas@gemini.ektf.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 57–73*

A SEHGAL'S PROBLEM

Bertalan Király (Eger, Hungary)

Abstract: In this paper we generalize the Krull intersection theorem to group rings and given neccessary and sufficient conditions for the intersection theorem to hold for an arbitrary group ring over a commutative integral domain.

1. Introduction.

Let S be a commutative noetherian ring with unity, and let I be an ideal with $I \neq S$. Let $I^\omega = \cap_{n=1}^{\infty} I^n$. The Krull intersection theorem states that if $x \in I^\omega$ then there exists t in I such that $x = xt$.

The object of this paper is to generalize this result to group rings (see [8], Problem 38).

Let R be a commutative ring with unity, G a group and RG its group ring and let $A(RG)$ denote the *augmentation ideal* of RG, that is the kernel of the ring homomorphism $\phi\colon RG \to R$ which maps the group elements to 1. It is easy to see that as an R-module $A(RG)$ is a free module with the elements $g-1\,(g \in G)$ as a basis. Let

$$A^\omega(RG) = \bigcap_{i=1}^{\infty} A^i(RG).$$

We shall say that the *intersection theorem* holds for $A(RG)$ if there exists an element $a \in A(RG)$ such that $A^\omega(RG)(1-a) = 0$.

Sufficient conditions for the intersection theorem to hold for certain RG are given in [2], [9], [6]. In the last paper are given the neccessary and sufficient conditions in the cases when G is finitely generated with a nontrivial torsion element and $R = \mathbf{Z}$ the ring of integers, or if G is finitely genereted and $R = \mathbf{Z_p}$ the ring of p-adic integers.

In this paper we given neccessary and sufficient conditions for the intersection theorem to hold for an arbitrary group ring over a commutative integral domain (Theorem 3.1).

2. Notations and some known facts. If H is a normal subgroup of G, then $I(RH)$ (or $I(H)$ for short when it is obvious from the context what ring R we are working with) denotes the ideal of RG generated by all elements of the form $h-1$,

Research supported by the Hungarian National Foundation for Scientific Research Grant, No T029132.

($h \in H$). It is well known that $I(RH)$ is the kernel of the natural epimorphism $\overline{\phi}\colon RG \to RG/H$ induced by the group homomorphism ϕ of G onto G/H. It is clear that $I(RG) = A(RG)$.

If $\mathcal{K}$ denotes a class of groups (by which we understand that $\mathcal{K}$ contains all groups of order 1 and, with each $H \in \mathcal{K}$ all isomorphic copies of H) we define the class $R\mathcal{K}$ of residually-$\mathcal{K}$ groups by letting $G \in R\mathcal{K}$ if and only if: whenever $1 \neq g \in G$, there exists a normal subgroup H_g of the group G such that $G/H_g \in \mathcal{K}$ and $g \notin H_g$.

We use the following notations for standard group classes: $\mathcal{N}_o$ — *torsion-free nilpotent groups,* $\overline{\mathcal{N}}_p$ — *nilpotent p-groups of finite exponent,* that is, nilpotent group in which for some $n = n(G)$ every element g satisfies the equation $g^{p^n} = 1$.

Let $\mathcal{K}$ be a class of groups. A group G is said to be *discriminated* by $\mathcal{K}$ if for every finite subset $g_1, g_2, \dots, g_n$ of distinct elements of G, there exists a group $H \in \mathcal{K}$ and a homomorphism ϕ of G into H, such that $\phi(g_i) \neq \phi(g_j)$ for $i \neq j, (1 \leq i, j \leq n)$.

The n-th *dimension subgroup* $D_n(RG)$ of G over R is the set of group elements $g \in G$ such that $g - 1$ lies in the n-th power of $A(RG)$. It is well known that for every natural number n the inclusion

$$\gamma_n(G) \subseteq D_n(RG)$$

holds, where $\gamma_n(G)$ is the n-th term of the lower central series of G.

Lemma 2.1. *Let a class $\mathcal{K}$ of groups be closed under the taking of subgroups (that is all subgroups of any member of the class $\mathcal{K}$ are again in the class $\mathcal{K}$) and also finite direct products (that is the direct products of finite member groups of the class $\mathcal{K}$ are again in the class $\mathcal{K}$) and let G be a residually-$\mathcal{K}$ group. Then G is discriminated by $\mathcal{K}$.*

The proof can be obtained immediately.

The ideal $A(RG)$ of the group ring RG is said to be residually nilpotent if $A^{\omega}(RG) = 0$.

Lemma 2.2. ([1], Proposition 15.1.) *If G is discriminated by a class of groups $\mathcal{K}$ and for each $H \in \mathcal{K}$ the equality $A^{\omega}(RH) = 0$ holds, then $A^{\omega}(RG) = 0$.*

Lemma 2.3. ([1], Proposition 1.12.) *The right annihilator L of the left ideal $I(RH)$ is non-zero if and only if H is a finite subgroup of a group G. If H is finite, then $L = (\sum_{h \in H} h)RG$.*

If H, M are two subgroups of G, then we shall denote by $[H, M]$ the subgroup generated by all commutators $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh, g \in H, h \in M$.

A series

$$G = H_1 \supseteq H_2 \supseteq \dots \supseteq H_n \supseteq \dots$$

of normal subgroups of a group G is called an N-*series* if $[H_i, H_j] \subseteq H_{i+j}$ for all $i, j \geq 1$ and also each of the Abelian groups H_i/H_j is a direct product of (possibly infinitely many) cyclic groups which are either infinite or of order p^k, where p is a fixed prime and k is bounded by some integer depending only on G.

The ideal $J_p(R)$ of a ring R is defined by $J_p(R) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} p^i R$.

In this paper we shall use the following theorems:

Theorem 2.1. ([3], Theorem E.) *Let G be a group with a finite N-series and R be a commutative ring with unity satisfying $J_p(R) = 0$. Then $A^{\omega}(RG) = 0$.*

We apply Theorem 2.1 for residually-$\overline{\mathcal{N}}_p$ groups. It is clear that the lower central series of a nilpotent p-group of finite exponent is an N-series.

Theorem 2.2. *Let R be a commutative ring with unity satisfying $J_p(R) = 0$. If G is a residually-$\overline{\mathcal{N}}_p$ group, then $A^{\omega}(RG) = 0$.*

The proof of this theorem follows from Lemmas 2.1 and 2.2 and Theorem 2.1 because the class $\overline{\mathcal{N}}_p$ is closed under the taking of subgroups and also finite direct products.

Theorem 2.3. ([7], VI, Theorem 2.15.) *If G is a residually torsion free nilpotent group and R is a commutative ring with unity such that its additive group is torsion-free, then $A^{\omega}(RG) = 0$.*

An element g of a group G is called a *generalized torsion element* if for all natural numbers n the order of the element $g\gamma_n(G)$ of the factor group $G/\gamma_n(G)$ is finite.

It is clear that torsion elements of a group G are generalized torsion elements of G.

If $g \in G$ is a generalized torsion element then Ω_g denotes the set of prime divisors of the orders of the elements $g\gamma_n(G) \in G/\gamma_n(G)$ for all $n = 2, 3, \ldots$.

Lemma 2.4. ([4]) *Let g be a generalized torsion element of a group G, Λ an arbitrary subset of Ω_g, $r \in \bigcap_{p\in\Lambda} J_p(R)$ and let*

$$x \in \bigcap_{p\in\Omega_g\setminus\Lambda} \bigcap_{n=1}^{\infty} I(G^{p^n}\gamma_n(G)).$$

Then one of the following statements holds:

1) *if Λ is the proper subset of Ω_g, then $r(g-1)x \in A^{\omega}(RG)$;*
2) *if $\Lambda = \Omega_g$, then $r(g-1) \in A^{\omega}(RG)$;*
3) *if $\Lambda = R$, then $(g-1)x \in A^{\omega}(RG)$.*

We have the following theorem.

Theorem 2.4. ([4]) *Let Ω be a nonempty subset of primes with $\bigcap_{p\in\Omega} J_p(R)=0$ and suppose that the group G is discriminated by the class of groups $\overline{\mathcal{N}}_\Omega$. If for every proper subset Λ of the set Ω at least one of the conditions*

1) $\bigcap_{p\in\Lambda} J_p(R)=0,$
2) *G is discriminated by the class of groups $\overline{\mathcal{N}}_{\Omega\setminus\Lambda}$ holds,*

then $A^\omega(RG)=0$.

3. The intersection theorem. Let R be a commutative ring with unity.

Lemma 3.1. *Let $g\in G$ and $g^{p^n}\in D_t(RG)$ for a prime p and a natural number n. Then there exists a natural number m such that*

$$p^m(g-1)\in A^t(RG).$$

Proof. We prove this by induction on t. For $t=1$ the statement is obvious. Let $p^s(g-1)\in A^{t-1}(RG)$ for some s. From the decomposition g^{p^m} as $(g-1+1)^{p^m}$ we have that

$$g^{p^m}-1=p^m(g-1)+\sum_{i=2}^{t-1}\binom{p^m}{i}(g-1)^i+\sum_{i=t}^{p^m}\binom{p^m}{i}(g-1)^i$$

for every m. If $m\ge n(s+t)$, then p^s divides $\binom{p^m}{i}$ for $i=1,2,\dots,t-1$ and $g^{p^m}\in D_t(RG)$. Therefore we have

$$g^{p^m}-1=p^m(g-1)+p^s(g-1)^2\sum_{i=2}^{t-1}d_i(g-1)^{i-2}+\sum_{i=t}^{p^m}\binom{p^m}{i}(g-1)^i,$$

where $d_ip^s=\binom{p^m}{i}$ for $i=2,3,\dots,t-1$. Since $g^{p^m}-1\in A^t(RG)$, by iteration from the preceding identity $p^m(g-1)\in A^t(RG)$ follows. The proof is complete .

Let p be a prime and n a natural number. Denote G^{p^n} is the subgroup of G generated by all elements of the form g^{p^n}, $g\in G$.

Lemma 3.2. *Let $h\in G^{p^n}\gamma_n(G)$ for a natural number n. Then for all natural numbers t and s for which $n\ge t+s$,*

$$h-1\equiv p^sF_t(h)\pmod{A^t(RG)}$$

holds, where $F_t(h)\in A(RG)$.

Proof. Writing the element h as $h = h_1^{p^n} h_2^{p^n} \dots h_m^{p^n} y_n \quad (h_i \in G, y_n \in \gamma_n(G))$ and using the identity

$$ab - 1 = (a-1)(b-1) + (a-1) + (b-1) \tag{1}$$

we have

$$h - 1 = (h_1^{p^n} h_2^{p^n} \dots h_m^{p^n} - 1)(y_n - 1) + (h_1^{p^n} h_2^{p^n} \dots h_m^{p^n} - 1) + (y_n - 1).$$

Since $t < n$, it follows that $(y_n - 1) \in A^t(RG)$. It is clear that p^s divides $\binom{p^n}{j}$ for $j = 1, 2, \dots, t-1$. Then from the preceding identity

$$h - 1 \equiv \sum_{i=1}^{m} (h_i^{p^n} - 1) b_i \equiv p^s \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{t-1} d_j (h_i - 1)^j b_i \ \equiv p^s F_t(h) \quad (\text{mod } A^t(RG))$$

follows, where $F_t(h) = p^s \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{t-1} d_j (h_i - 1)^j b_i, b_i \in RG$ and $p^s d_j = \binom{p^n}{j}$ for $1 \leq j \leq t-1$. The proof is complete .

Suppose further that R is a commutative integral domain. Let $\mid G \mid$ be the order of the group G.

Lemma 3.3. *Let H be a subgroup of a group G and $I(H)(1-a) = 0$ for a suitable element $a \in A(RG)$. Then H is finite and the order of H is invertible in R.*

Proof. By the condition of our lemma the right annihilator of the left ideal $I(H)$ is non-zero. By Lemma 2.3 H is finite and $1-a$ can be written as $1 - a = (\sum_{h \in H} h)x$ for a suitable element $x \in RG$. If $\phi(y)$ is the sum of the coefficients of the element $y \in RG$, then the map $\phi \colon RG \to R$ is a ring homomorphism of RG onto R, with $\phi(1-a) = \phi((\sum_{h \in H} h)x) = |H|\phi(x) = 1$, that is $|H|$ is invertible in R. The proof is complete .

Let $o(g)$ be the order of the element $g \in G$ and let $D_\omega(RG)$ be the ω-th dimension subgroup of G over R, that is $D_\omega(RG) = \cap_{n=1}^{\infty} D_n(RG)$. It is easy to see that $D_\omega(RG) = \{g \in G \mid g - 1 \in A^\omega(RG)\}$.

Let $R^\star$ denotes the unit group of the ring R.

Lemma 3.4. *Let the intersection theorem hold for $A(RG)$. Then the set $S = \{g \in G \mid o(g) \in R^\star\}$ coincides with $D_\omega(RG)$ and it is the largest finite subgroup of order invertible in R.*

Proof. Let $g \in S$. Then the order $n = o(g)$ of the element g is invertible in R and from the identity

$$0 = g^n - 1 = n(g-1) + \binom{n}{2}(g-1)^2 + \dots + (g-1)^n$$

we have

$$g-1=-n^{-1}(g-1)\left(\binom{n}{2}(g-1)+\binom{n}{3}(g-1)^2+\ldots+(g-1)^{n-1}\right).$$

Hence, by iteration, we have $g-1\in A^{\omega}(RG)$. This implies that $S\subseteq D_{\omega}(RG)$.

Conversely, it is clear that $I(D_{\omega}(RG))\subseteq A^{\omega}(RG)$ and from $A^{\omega}(RG)(1-a)=0$ we have $I(D_{\omega}(RG))(1-a)=0$. Then by Lemma 3.3 the order of the subgroup $D_{\omega}(RG)$ is invertible in R. Therefore $D_{\omega}(RG)\subseteq S$. The proof is complete .

Corollary. *Let the intersection theorem hold for $A(RG)$ and let $\overline{g}\neq\overline{1}$ be an element of finite order n of the group $\overline{G}=G/D_{\omega}(RG)$. Then the prime divisors of n are not invertible in R.*

Lemma 3.5. *Let G be a group having a p-element g and suppose that the intersection theorem holds for $A(RG)$. If the ideal $J_p(R)$ is non-zero, then $g\in D_{\omega}(RG)$.*

Proof. Let $A^{\omega}(RG)(1-a)=0$ for a suitable element $a\in A(RG)$ and let p^n be the order of the element $g\in G$. Therefore for every natural number t we have $g^{p^n}\in\gamma_t(G)\subseteq D_t(RG)$. If $0\neq r\in J_p(R)$ then for every $m\geq 1$ for the element r we have the decomposition $r=p^m r_m(r_m\in R)$. Then by Lemma 3.1

$$r(g-1)=p^m r_m(g-1)\in A^t(RG)$$

for an enough large integer m. Since t is an arbitrary natural number, we conclude that $r(g-1)\in A^{\omega}(RG)$, and so, $r(g-1)(1-a)=0$. In the group ring over an integral domain this equation implies that $(g-1)(1-a)=0$. Then by Lemma 3.3 the order of the element g is invertible in R. Consequently by Lemma 3.4 $g\in D_{\omega}(RG)$. The proof is complete .

Let $W_p(G)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G^{p^n}\gamma_n(G)$.

Lemma 3.6. *Let $m=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_s^{m_s}$ be the prime power decomposition of the order of the element $g\in G$. Then for every prime $p\neq p_i,(i=1,2,\ldots,s)$ the element g lies in $W_p(G)$.*

Proof. Since the numbers p and m are coprimes, for an arbitrary n we can be choose the integers k and l with $km+lp^n=1$. Then

$$g=g^{km+lp^n}=(g^m)^k(g^l)^{p^n}=(g^l)^{p^n}\in G^{p^n}\gamma_n(G).$$

Therefore $g\in G^{p^n}\gamma_n(G)$ for all n. Consequently $g\in W_p(G)$.

Let π be the set of those primes p for which the group G contains an element of a prime order p and let $\pi^\star = \{p \in \pi \mid p \in R^\star\}$, where $R^\star$ is the unit group of R. We recall that if the intersection theorem holds for $A(RG)$, then by Lemma 3.4, the set of the prime divisors of $|D_\omega(RG)|$ coincides with $\pi^\star$.

Let $\overline{G} = G/D_\omega(RG)$.

Lemma 3.7. Let the intersection theorem hold for $A(RG)$. Then for all $p \in \pi \setminus \pi^\star$, $W_p(\overline{G})$ is a torsion group with no p-elements and $\bigcap_{p\in\pi\setminus\pi^\star} W_p(\overline{G}) = \langle\overline{1}\rangle$.

Proof. Let $A^\omega(RG)(1-a) = 0$ for a suitable element $a \in A(RG)$. Suppose further that p is a fixed prime in $\pi\setminus\pi^\star$ and $\overline{g} = gD_\omega(RG)$ is an arbitrary element of $W_p(\overline{G})$. We shall prove that the element $\overline{g}$ has a finite order. For every n the element $\overline{g}$ lies in the subgroup $\overline{G}^{p^n}\gamma_n(\overline{G})$. Therefore for the element g we have the decomposition

$$g = g_1^{p^n} g_2^{p^n} \dots g_k^{p^n} h_n d_n,$$

where $h_n \in \gamma_n(G), d_n \in D_\omega(RG), g_i \in G, i = 1, 2, \dots, k$. Since $p \in \pi \setminus \pi^\star$, clearly p is not invertible in R and from Lemma 3.4 and from the definition of the set $\pi\setminus\pi^\star$ it follows that $\overline{G}$ contains a nontrivial p-element $\overline{h} = hD_\omega(RG)$. Let the order of the element $\overline{h}$ be p^s. Then $h^{p^s} \in D_\omega(RG) \subseteq D_t(RG)$ for every natural number t. By Lemma 3.1 then there exists m such that

$$p^m(h-1) \in A^t(RG). \tag{2}$$

By Lemma 3.2 for an enough large n the element $x = g_1^{p^n} g_2^{p^n} \dots g_k^{p^n} h_n \in G^{p^n}\gamma_n(G)$ satisfies the condition

$$x - 1 \equiv p^m F_t(x) \pmod{A^t(RG)}, \quad F_t(x) \in A(RG). \tag{3}$$

Since $d_n - 1 \in A^\omega(RG)$ and $g = xd_n$, from (1) it follows that $(g-1)(h-1) \equiv (x-1)(h-1) \pmod{A^t(RG)}$. Then by (2) and (3) we obtain

$$(g-1)(h-1) \equiv F_t(x)p^m(h-1) \equiv 0 \pmod{A^t(RG)}.$$

Since t is an arbitrary natural number we conclude that

$$(g-1)(h-1) \in A^\omega(RG). \tag{4}$$

By the condition of our lemma it follows, that $(g-1)(h-1)(1-a) = 0$. The order of the element h is not invertible in R, consequently, by Lemma 3.3 $(h-1)(1-a) \neq 0$, and $g-1$ has a non-zero annihilator. Then by Lemma 2.3 the order of the element g is finite. Therefore $\overline{g}$ is an element of finite order. Consequently, $W_p(\overline{G})$ is a torsion subgroup of $\overline{G}$.

Now suppose that the element $\overline{g} = gD_\omega(RG)$ is a non-trivial p-element. (Note that $p \in \pi \setminus \pi^\star$.) Since (4) is true for every p-element from the group $\overline{G}$, it follows that

$$(g-1)^2 \in A^\omega(RG). \tag{5}$$

By Lemma 3.4 $D_\omega(RG)$ is finite and therefore the order of the element g is finite. Let $o(g) = l$. From the identity

$$0 = g^l - 1 = l(g-1) + \binom{l}{2}(g-1)^2 + \ldots + (g-1)^l$$

and from (5) we conclude that $l(g-1) \in A^\omega(RG)$. Hence $l(g-1)(1-a) = 0$, because the intersection theorem holds for $A(RG)$. Since R is an integral domain, it follows that $(g-1)(1-a) = 0$, which is impossible by Lemma 3.3 because p divides $o(g)$ and therefore $o(g)$ is not invertible in R. Consequently, for every $p \in \pi \setminus \pi^\star$ the subgroup $W_p(\overline{G})$ contains no p-elements.

Now we prove the equation $\bigcap\limits_{p\in\pi\setminus\pi^\star} W_p(\overline{G}) = \langle\overline{1}\rangle$. Let $\overline{v} \in \bigcap\limits_{p\in\pi\setminus\pi^\star} W_p(\overline{G})$. Then the order $o(\overline{v})$ of the element $\overline{v}$ is finite and by Corollary of Lemma 3.4. the prime divisors of $o(\overline{v})$ are not invertible in R, that is are lies in the set $\pi \setminus \pi^\star$. This is impossible since by above facts the subgroup $W_p(\overline{G})$ with no p-elements for all $p \in \pi \setminus \pi^\star$. Consequently $\overline{v} = \overline{1}$ and $\cap_{p\in\pi\setminus\pi^\star} W_p(\overline{G}) = \langle\overline{1}\rangle$. The proof is complete.

From Lemma 5.2 of [6] it we have

Lemma 3.8. *Let H_1, H_2 be normal subgroups of a group G with $H_1 \cap H_2 = \langle 1\rangle$. Then $I(H_1) \cap I(H_2) = I(H_1)I(H_2)$.*

Lemma 3.9. *Let the set of elements of finite order of a group G form a finite nilpotent group $T(G)$ and let $A^\omega(RG/T(G)) = 0$. Suppose that for all $p \in \pi \setminus \pi^\star$ the group $W_p(G)$ is finite with no p-elements and $J_p(R) = 0$. Then the intersection theorem holds for $A(RG)$.*

Proof. Note that in this case $\pi = \pi^\star$ and it is the set of prime divisors of the order $|T(G)|$ of the group $T(G)$.

We prove lemma by induction on the order of $T(G)$. If $|T(G)| = 1$, then $A^\omega(RG) = 0$ and in this case the proof is complete.

Suppose first that $T(G)$ is a p-group. If $p \in \pi \setminus \pi^\star$, then p is not invertible in R and from the conditions of our lemma it follows that $W_p(G) = \langle 1\rangle$ and $J_p(R) = 0$. The group $G/G^{p^n}\gamma_n(G)$ is a nilpotent p-group of finite exponent and by Theorem 2.1 $A^\omega(RG/G^{p^n}\gamma_n(G)) = \overline{0}$ for all n. Since $W_p(G) = \langle 1\rangle$ it follows, that G is a residually-$\overline{\mathcal{N}}_p$ group. Therefore by Theorem 2.2 $A^\omega(RG) = 0$ and the intersection theorem holds for $A(RG)$.

Now let $p \in \pi^\star$, that is p is invertible in R. From $A^\omega(RG/T(G)) = 0$ it follows that $A^\omega(RG) \subseteq I(T(G))$. If p^n is the order of $T(G)$ then the element $1-(p^n)^{-1}\sum_{g\in T(G)} g$ in ideal $A(RG)$ and by Lemma 2.3

$$A^\omega(RG)(1-a) \subseteq I(T(G))(1-a) = 0.$$

Now assume that there exist at least two different primes dividing $|T(G)|$. Then for the finite nilpotent group $T(G)$ we have the direct product decomposition

$$T(G) = S_{p_1} \otimes S_{p_2} \otimes \ldots \otimes S_{p_k},$$

of its Sylow p-subgroups S_{p_i}, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ with $k \geq 2$.

If $\pi^\star \neq \emptyset$, that is among the primes p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ there exists p_j which is invertible in R, then by Lemma 2.3, the element $b = 1 - \mid S_{p_j} \mid^{-1} \sum_{g\in S_{p_j}} g$ satisfies the equation

$$I(S_{p_j})(1-b) = 0, \quad b \in A(RG). \tag{6}$$

By the induction hypothesis there exists an element $\overline{c} \in A(RG/S_{p_j})$ such that $A^\omega(RG/S_{p_j})(1-\overline{c}) = \overline{0}$. If $c \in A(RG)$ is an element from the inverse image of $\overline{c}$ by the homomorphism $\phi\colon RG \to RG/S_{p_j}$, then

$$A^\omega(RG)(1-c) \subseteq I(S_{p_j}).$$

Let $1-a = (1-c)(1-b)$. Then from the above inclusion and from (6) we obtain the equality $A^\omega(RG)(1-a) = 0$.

Suppose that $\pi^\star = \emptyset$, that is all p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ are not invertible in R. By the induction there exist $\overline{c}_1 \in A^\omega(RG/S_{p_l})$ and $\widetilde{c}_2 \in A^\omega(RG/S_{p_t})$ such that

$$A^\omega(RG/S_{p_l})(1-\overline{c}_1) = \overline{0} \quad \text{and} \quad A^\omega(RG/S_{p_t})(1-\widetilde{c}_2) = \widetilde{0}.$$

Then $A^\omega(RG)(1-c_1) \subseteq I(S_{p_l})$ and $A^\omega(RG)(1-c_2) \subseteq I(S_{p_t})$ for suitable elements $c_1, c_2 \in A(RG)$. Hence by Lemma 3.8 we have

$$A^\omega(RG)(1-c_1)(1-c_2) \subseteq I(S_{p_l}) \cap I(S_{p_t}) = I(S_{p_l})I(S_{p_t}). \tag{7}$$

We can be choose the integers n and m such that $n|S_{p_l}| + m|S_{p_t}| = 1$. It is easy to see that the sum of the coefficients of the element $1-d = n\sum_{g\in S_{p_1}} g + m\sum_{g\in S_{p_2}} g$ equals to 1 and therefore $d \in A(RG)$. Since $T(G)$ is a finite group, by Lemma 2.3 it follows, that $I(S_{p_l})I(S_{p_t})(1-d) = 0$. Then by (7) the element $1-a = (1-c_1)(1-c_2)(1-d)$ satisfies the condition $A^\omega(RG)(1-a) = 0$. The proof is complete .

We shall say that G is a *generalized nilpotent* group if it is discriminated by the class of the nilpotent group. This is equivalent to the equality $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(G) = \langle 1\rangle$.

Lemma 3.10. ([5]) *Let g, h are an elements of a nilpotent group G. Suppose that $\gamma_{t+1}(G) = \langle 1\rangle$ and $h^{n^s} = 1$. Then the element h commute with $g^{n^{s(t-1)}}$.*

We generalize this Lemma.

Lemma 3.11. *Let G be a generalized nilpotent group, Ω a subset of the primes and let $g \in \cap_{p\in\Omega} W_p(G)$. If the prime divisors of the order $o(h)$ of the element h are in Ω, then $gh = hg$. If the orders of the elements g and h are coprimes, then $gh = hg$.*

Proof. Let $g \in \cap_{p\in\Omega} W_p(G)$ and let $c = g^{-1}h^{-1}gh \neq 1$ be the commutator of g and h. Since G is a generalized nilpotent group, there exists an integer $t \geq 2$ such that $c \notin \gamma_{t+1}(G)$. Let $\overline{g}$ and $\overline{h}$ be the image of the elements g and h in $\overline{G} = G/\gamma_{t+1}(G)$.

First we suppose that $\overline{h}$ is a p-element ($p \in \Omega$) of $\overline{G}$ and $o(h) = p^s$. Since the element $g \in \cap_{p\in\Omega} W_p(G)$, that for g we have

$$g = g_1^{p^{2s(t-1)}} g_2^{p^{2s(t-1)}} \dots g_k^{p^{2s(t-1)}} x_{2s(t-1)},$$

where $x_{2s(t-1)} \in \gamma_{2s(t-1)}(G), g_i \in G, i = 1, 2, \dots, k$. Then

$$\overline{g} = \overline{g}_1^{p^{2s(t-1)}} \dots \overline{g}_2^{p^{2s(t-1)}} \dots \overline{g}_k^{p^{2s(t-1)}} \dots \overline{x}_{2s(t-1)}.$$

From Lemma 3.10 $\overline{h}\overline{g}_i^{p^{2s(t-1)}} = \overline{g}_i^{p^{2s(t-1)}}\overline{h}$ follow for all $i = 1, 2, \dots, k$. Since $t \geq 2$, we have $2s(t-1) \geq t$ and therefore $\overline{x}_{2s(t-1)}$ is a central element of $\overline{G}$. Consequently, $\overline{g}\overline{h} = \overline{h}\overline{g}$.

Let h be a torsion element of G and let the prime divisors of the order of h be in Ω. Then the element $\overline{h}$ of the nilpotent group $\overline{G}$ has the decomposition $\overline{h} = \overline{h}_1\overline{h}_2 \dots \overline{h}_l$, where $l \geq 1, \overline{h}_i^{{p_i}^{n_i}} = \overline{1}, p_i \in \Omega, i = 1, 2, \dots, l$. From the above fact we have that $\overline{g}\overline{h}_i = \overline{h}_i\overline{g}$ for all i. Therefore $\overline{g}\overline{h} = \overline{h}\overline{g}$. Consequently $c \in \gamma_{t+1}(G)$, which is a contradiction.

Let $g^n = h^m = 1$. Suppose that n and m are coprimes. If the set Ω is the set of the prime divisors of m then by Lemma 3.6 $g \in \cap_{p\in\Omega} W_p(G)$ and the by above argument $gh = hg$. The proof is complete.

Lemma 3.12. *Let $\{H_\alpha\}_{\alpha\in K}$ be an arbitrary set of normal subgroups of a group G. Suppose that H is a subgroup of G of finite exponent k. If $g \in \cap_{\alpha\in K}(H_\alpha H)$, then $g^k \in \cap_{\alpha\in K} H_\alpha$.*

Proof. Let $g \in \cap_{\alpha\in K}(H_\alpha H)$. Then for all $\alpha \in K$ the element g lies in $H_\alpha H$ and $gh \in H_\alpha$ for a suitable element $h \in H$. We shall show that for every $\alpha \in K$ we have $g^s h^s \in H_\alpha$ by induction on s.

For $s = 1$ the proof is similar as above. Suppose that $g^{s-1}h^{s-1} \in H_\alpha$. Then $hghh^{-1} = hg \in H$ and $hgg^{s-1}h^{s-1} = hg^s h^{s-1} \in H_\alpha$. Then $h^{-1}hg^s h^{s-1}h = h^s g^s \in H_\alpha$ since H_α is a normal subgroup of G. If $s = k$ then $h^s = 1$ and therefore $g^k \in H_\alpha$. Consequently, $g^k \in \cap_{\alpha\in K} H_\alpha$.

Let $\overline{G} = G/D_\omega(RG)$.

Lemma 3.13. *Let the intersection theorem hold for $A(RG)$. Then the following assertionare satisfied:*

1) *If the set $\pi\setminus\pi^\star$ contains more than one element then the set $T(G)$ of the torsion elements of G form a finite normal subgroup of G, and for all $p \in \pi \setminus \pi^\star$ the subgroup $W_p(\overline{G})$ is finite with no p-elements and $J_p(R) = 0$.*
2) *If $\pi \setminus \pi^\star = \{p\}$ then $\overline{G}$ is a residually-$\overline{\mathcal{N}}_p$ group and $J_p(R) = 0$.*
3) *If $\pi = \pi^\star$ then either $\overline{G}$ is discriminated by the torsion free nilpotent groups, or there exists a nonempty subset Ω of the set of primes such that $\cap_{p\in\Omega} J_p(R) = 0$, the group $\overline{G}$ is discriminated by the class of groups $\overline{\mathcal{N}}_\Omega$ and for every proper subset Λ of the set Ω at least one of the conditions*
   1) *$\cap_{p\in\Lambda} J_p(R) = 0$*
   2) *$\overline{G}$ is discriminated by the class of groups $\overline{\mathcal{N}}_{\Omega\setminus\Lambda}$*

holds.

Proof. Let $A^\omega(RG)(1-a) = 0$ for a suitable element $a \in A(RG)$.

Case 1. Suppose that the set $\pi \setminus \pi^\star$ contains more than one element. First we prove that the elements of finite order of the group $\overline{G}$ form a normal subgroup.

Let $\overline{g}, \overline{h} \in \overline{G}$ and $o(\overline{g}) = n, o(\overline{h}) = m$. It is evident that the order of $\overline{g}^{-1}$ is finite. Therefore it is enough to show that the order of the element $\overline{g}\overline{h}$ is finite.

By Corollary of Lemma 3.4 it follows that the prime divisors of the integers n and m are in $\pi \setminus \pi^\star$. Let us denote by $d = d(n, m)$ the greatest common divisor of n and m. Then $n = n^{'}d$ and $m = m^{'}d$ for a suitable $n^{'}$ and $m^{'}$ with $d(n^{'}, m^{'}) = 1$.

Put $k = n^{'}m^{'}d$. If $d = 1$ then by Lemma 3.7 $\overline{g}\overline{h} = \overline{h}\overline{g}$ and therefore $(\overline{g}\overline{h})^{nm} = \overline{1}$.

Let now $d \neq 1$. Suppose that k is a prime power p. Then $\overline{g}$ and $\overline{h}$ are p-elements of $\overline{G}$. Since $\pi \setminus \pi^\star$ contains more than one element, there exists $q \in \pi \setminus \pi^\star$ such that $q \neq p$. By Lemma 3.6 $\overline{g}$, $\overline{h}$ are in $W_q(\overline{G})$, which by Lemma 3.7 is a torsion group, and therefore the order of the element $\overline{g}\overline{h}$ is finite.

Let k be a composed number. Then for k we have the decomposition $k = p^\alpha l$ for some prime $p \in \pi \setminus \pi^\star$ and some natural number l where $(l, p) = 1$. Then there exist integers s and r such that $sp^\alpha + rl = 1$. Hence $\overline{g}\overline{h} = \overline{g}^{sp^\alpha}\overline{g}^{rl}\overline{h}^{sp^\alpha}\overline{h}^{rl}$. Since

$d(o(\overline{g}^{rl}), o(\overline{h}^{sp^\alpha})) = d(o(\overline{g}^{sp^\alpha}), o(\overline{h}^{rl})) = 1$ then, Lemma 3.11 $\overline{g}^{rl}\overline{h}^{sp^\alpha} = \overline{h}^{sp^\alpha}\overline{g}^{rl}$ and $\overline{g}^{sp^\alpha}\overline{h}^{rl} = \overline{h}^{rl}\overline{g}^{sp^\alpha}$. By the induction we have

$$(\overline{g}\overline{h})^t = (\overline{g}^{sp^\alpha}\overline{h}^{sp^\alpha})^t(\overline{g}^{rl}\overline{h}^{rl})^t \tag{8}$$

for every t. The orders of the elements $\overline{g}^{sp^\alpha}$ and $\overline{h}^{sp^\alpha}$ are coprimes with p and by Lemma 3.6 $\overline{g}^{sp^\alpha}, \overline{h}^{sp^\alpha}$ are in $W_p(\overline{G})$ which by Lemma 3.7 is a torsion group. Therefore $(\overline{g}^{sp^\alpha}\overline{h}^{sp^\alpha})^{t_1} = \overline{1}$ for a suitable t_1. By similar arguments we obtain that $(\overline{g}^{rl}\overline{h}^{rl})^{t_2} = \overline{1}$ for a suitable t_2. Then by (8) the integer $t = t_1t_2$ satisfies the equality $(gh)^t = 1$. Consequently $T(\overline{G})$ is a torsion subgroup of $\overline{G}$ and clearly it is normal in $\overline{G}$.

Now we show that $T(G)$ is a torsion normal subgroup of G. It is clear that $T(\overline{G})$ is a generalized nilpotent group, because $\overline{G}$ is a generalized nilpotent group. By Lemma 3.11. for $T(\overline{G})$ we have the direct product decomposition

$$T(\overline{G}) = \prod_{p\in\pi\setminus\pi^\star} \overline{S}_p \tag{9}$$

of its Sylow p-subgroups $\overline{S}_p$.

Let S_p be the inverse image of $\overline{S}_p$ in G. We shall show that $I(S_p)I(S_q) \subseteq A^\omega(RG)$ for $p \neq q$ and $p, q \in S_p, p \in \pi \setminus \pi^\star$. It will be sufficient to show that $(g-1)(h-1) \in A^\omega(RG)$ for all $g \in S_p,$ and $h \in S_q$. By (9) for the elements g and h we have the decompositions $g = vx$ and $h = wy$ where the elements x, y, v^{p^i}, w^{q^j} are in $D_\omega(RG)$ for suitable i and j. Applying the identity (5) to the elements $g-1, h-1$ we have

$$(g-1)(h-1) \equiv (v-1)(w-1) \pmod{A^\omega(RG)}, \tag{10}$$

because $x-1$ and $y-1$ in $A^\omega(RG)$. For the elements $v^{p^i}-1$ and $w^{q^j}-1$ we have

$$v^{p^i} - 1 = p^i(v-1) + \binom{p^i}{2}(v-1)^2 + \ldots + (v-1)^{p^i},$$

$$w^{q^j} - 1 = q^j(w-1) + \binom{q^j}{2}(v-1)^2 + \ldots + (w-1)^{q^j}.$$

Choose the integers s and l such that $sp^i + lq^j = 1$. Multiplying these equations by $s(w-1)$ and $l(v-1)$ respectively and adding we obtain

$$\begin{aligned}(v-1)(w-1) = {}&(v-1)(w-1)b + c(v-1)(w-1)+\\ &+ s(v^{p^i}-1)(w-1) + l(v-1)(w^{q^j}-1),\end{aligned}$$

where

$$b = -l(\binom{q^j}{2}(w-1) + \binom{q^j}{3}(w-1)^2 + \ldots + (w-1)^{q^j-1}),$$

$$c = -s(\binom{p^i}{2}(v-1) + \binom{p^i}{3}(v-1)^2 + \ldots + (v-1)^{p^i-1}).$$

Since the elements $b, c \in A(RG)$ and $v^{p^i} - 1$ and $w^{q^j} - 1$ are in $A^\omega(RG)$, from the above identity we conclude that $(v-1)(w-1) \in A^t(RG)$ for all integers $t \geq 1$. Therefore $(v-1)(w-1) \in A^\omega(RG)$ and by (10), $(g-1)(h-1) \in A^\omega(RG)$. Consequently $I(S_p)I(S_q) \subseteq A^\omega(RG)$.

Now we show that $T(G)$ is a finite subgroup. Let q be an arbitrary element of $\pi \setminus \pi^\star$, $H_q = S_{p_1}S_{p_2}\ldots$, where $q,\ p_i, \in \pi \setminus \pi^\star$ and $p_i \neq q$ for all i. Then from the above argument it follows that

$$I(H_q)I(S_q) \subseteq A^\omega(RG) \text{ and } I(S_q)I(H_q) \subseteq A^\omega(RG).$$

Since $A^\omega(RG)(1-a) = 0$ we have that

$$I(H_q)I(S_q)(1-a) = 0 \text{ and } I(S_q)I(H_q)(1-a) = 0. \tag{11}$$

The prime q is not invertible in R and so, by Lemma 3.1, $I(S_q)(1-a) \neq 0$. Therefore by (11) the ideal $I(H_q)$ has a non-zero right annihilator. Consequently H_q is a finite subgroup of G and therefore the set $\pi \setminus \pi^\star$ is finite. Furthermore $I(H_q)(1-a) \neq 0$ because the order of H_q is not invertible in R. It follows that S_p is finite for all $p \in \pi \setminus \pi^\star$. Then by (9) we obtain that $T(\overline{G})$ is finite. By Lemma 3.4 $D_\omega(RG)$ is a finite subgroup of G and from the isomorphism $T(\overline{G}) \cong T(G)/D_\omega(RG)$ it follows that $T(G)$ is a finite subgroup of G.

Let $p \in \pi \setminus \pi^\star$. Then in G there exists a p-element g such that $g \in D_\omega(RG)$. Therefore by Lemma 3.5 $J_p(R) = 0$. From Lemma 3.7 we have that $W_p(\overline{G}) \subseteq T(\overline{G})$, and $W_p(\overline{G})$ contains no p-elements. Since $T(\overline{G})$ is finite, it follows that $W_p(\overline{G})$ is also a finite subgroup of G with no p-elements.

Case 2. Let $\pi \setminus \pi^\star = \{p\}$. Then from the Corollary of Lemma 3.4 it follows that the elements of finite order of $\overline{G}$ are p-elements. By Lemma 3.7 $W_p(\overline{G})$ is a torsion group with no p-elements. Consequently $W_p(\overline{G}) = \langle\overline{1}\rangle$ that is $\overline{G}$ is a residually nilpotent p-group of finite exponent.

Case 3. Let $\pi = \pi^\star$. By Lemma 3.2 $T(G) = D_\omega(RG)$ and it is a finite group.

Assume G contains no generalized torsion element of infinite order, and let $\sqrt{\gamma_n(G)}$ be the isolator of $\gamma_n(G)$ in G, that is

$$\sqrt{\gamma_n(G)} = \{g \in G \mid g^m \in \gamma_n(G) \text{ for some integer } m \geq 1\}.$$

Then $\cap_{n=1}^{\infty}\sqrt{\gamma_n(G)} = D_\omega(RG)$ and therefore for every element $\overline{g} = gD_\omega(RG)$ there exists an integer n such that $g \in \sqrt{\gamma_n(G)}$. If ϕ is the homomorphism of $\overline{G}$ onto the torsion free nilpotent group $G/\gamma_n(G)$ then $\phi(\overline{g}) \neq \widetilde{1}$, that is, $\overline{G}$ is a residually torsion free nilpotent group.

Let now g be a generalized torsion element of G of infinite order. Since $\cap_{n=1}^{\infty}\gamma_n(G) \subseteq D_\omega(RG)$ and the order of $D_\omega(RG)$ is finite, it follows that $g \in \cap_{n=1}^{\infty}\gamma_n(G)$.

Let Ω denote the set of prime divisors of the orders of the elements $g\gamma_n(G) \in G/\gamma_n(G)$ for all $n = 2, 3, \ldots$. It is obvious that Ω is non-empty.

Let $r \in \cap_{p\in\Omega}J_p(R)$. Then by Lemma 3.3 it follows that $r(g-1) \in A^\omega(RG)$ and therefore $r(g-1)(1-a) = 0$ because $A(RG)$ satisfies the intersection theorem. Since R is an integral domain and the order of the element g is infinite, from the above equality it follows that $r = 0$. Consequently $\cap_{p\in\Omega}J_p(R) = 0$.

Now we show that if Λ is a subset of Ω such that Λ is either empty, or $\cap_{p\in\Lambda}J_p(R) \neq 0$ then the group $\overline{G}$ is discriminated by the class of groups $\overline{\mathcal{N}}_{\Omega\setminus\Lambda}$.

Let $\overline{h}_1 = h_1D_\omega(RG), \overline{h}_2 = h_2D_\omega(RG), \ldots, \overline{h}_m = h_mD_\omega(RG)$, $m \geq 2$ be an arbitrary set of a distinct elements of $\overline{G}$. Note that if $\overline{h}_i = \overline{1}$ for a some i then we write $h_iD_\omega(RG) = D_\omega(RG)$ and $h_i = 1$. Suppose further

$$K = \left\{g_n \mid g_n = h_i, \text{ or } g_n = h_ih_j^{-1}, i \geq j, i = 1, 2, \ldots, m, j = 2, 3, \ldots, m\right\}.$$

Note that $h_i{h_j}^{-1} \in D_\omega(RG)$ for all $i \neq j$. Since $\pi = \pi^\star$, from the construction of the set K it follows that the elements $1 \neq g_i \in K$ are of infinite order.

Suppose there exists an element $g_i \neq 1$ in K such that

$$g_i \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G^{p^n}\gamma_n(G)D_\omega(RG)$$

for all $p \in \Omega \setminus \Lambda$. Then by Lemma 3.12 ${g_i}^t \in \cap_{n=1}^{\infty}G^{p^n}\gamma_n(G)$ for every $p \in \Omega\setminus\Lambda$, where $t = |D_\omega(RG)|$. Therefore

$$g_i^t - 1 \in \bigcap_{p\in\Omega\setminus\Lambda}\bigcap_{n=1}^{\infty} I(G^{p^n}\gamma_n(G)).$$

For a non-zero element $r \in \cap_{p\in\Lambda}J_p(R)$ the element $r(g-1)(g_i^t-1)$ is in $A^\omega(RG)$ by Lemma 3.3 (if $\Lambda = \emptyset$, then $(g-1)(g_i^t-1) \in A^\omega(RG)$). Therefore $r(g-1)(g_i^t-1)(1-a) = 0$ (respectively $(g-1)(g_i^t-1)(1-a) = 0$). The right annihilator of the element g is zero, because g is an element of infinite order. Therefore $(g_i^t-1)(1-a)r = 0$ (respectively $(g_i^t-1)(1-a) = 0$). Similarly, since g_i is an element of infinite order, we conclude that the preceding equality implies $(1-a)r = 0$. This is a contradiction. Consequently, there exists a prime $p_\circ \in \Omega \setminus \Lambda$ such that

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G^{{p_\circ}^n} \gamma_n(G) D_\omega(RG) \bigcap K = M,$$

where either M is the empty set or $M = \{1\}$. Then for all $g_i \in K$ there exists n such that

$$g_i \in G^{{p_\circ}^n} \gamma_n(G) D_\omega(RG).$$

Therefore

$$h_i G^{{p_\circ}^n} \gamma_n(G) D_\omega(RG) \neq h_j G^{{p_\circ}^n} \gamma_n(G) D_\omega(RG)$$

whenever $i \neq j$. Then by the homomorphism

$$\phi \colon G/D_\omega(RG) \to G/G^{{p_\circ}^n} \gamma_n(G) D_\omega(RG)$$

we obtain that

$$\phi(h_i D_\omega(RG)) \neq \phi(h_j D_\omega(RG))$$

whenever $i \neq j$. Consequently $\overline{G}$ is discriminated by the class of groups $\overline{\mathcal{N}}_{\Omega \setminus \Lambda}$. The proof is complete.

Theorem 3.1. *Let R be a commutative integral domain. The intersection theorem holds for $A(RG)$ if and only if $D_\omega(RG)$ is the largest finite subgroup of G of order invertible in R and at least one of the following conditions holds:*

1) *$G/D_\omega(RG)$ is a residually torsion free nilpotent group;*
2) *there exists a subset Ω of primes such that $G/D_\omega(RG)$ is discriminated by the class of groups $\overline{\mathcal{N}}_\Omega$, $\cap_{p \in \Omega} J_p(R) = 0$ and for an arbitrary subset Λ of Ω, $\cap_{p \in \Lambda} J_p(R) = 0$ or $G/D_\omega(RG)$ is discriminated by the class of groups $\overline{\mathcal{N}}_{\Omega \setminus \Lambda}$;*
3) *the set of the elements of finite order of G forms a finite normal subgroup $T(G)$, and for every prime divisor p of $|T(G)|$, which is not invertible in R, the group $W_p(G/D_\omega(RG))$ is finite with no p-elements and $J_p(R) = 0$.*

Proof. Let the conditions 1) or 2) be satisfied. Then by Theorems 2.3 and 3.1 $A^\omega(R\overline{G}) = 0$ and therefore $A^\omega(RG) \subseteq I(D_\omega(RG))$. The order $t = |D_\omega(RG)|$ is invertible in R and the element $a = 1 - t^{-1} \sum_{g \in D_\omega(RG)} g$ is in $A(RG)$. By Lemma 2.3 the element $1 - a$ satisfies the equality

$$A^\omega(RG)(1-a) \subseteq I(D_\omega(RG)(1-a) = 0,$$

that is in these cases the intersection theorem holds for $A(RG)$.

Case 3. Let $\overline{G} = G/D_\omega(RG)$. By Lemma 3.2 $T(G) \supseteq D_\omega(RG)$ and because

$$D_\omega(RG) \supseteq \cap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(G),$$

by the isomorphism $T(\overline{G}) \cong T(G)/D_\omega(RG)$ we conclude that $T(\overline{G})$ is a finite nilpotent group.

Let $\overline{g} \in T(\overline{G})$ and let the prime p divides $|T(G)|$ and let p be not invertible in R. Then $\overline{g}$ is an element of infinite order. By the conditions of our theorem $W_p(\overline{G})$ and $T(\overline{G})$ are finite subgroups of $\overline{G}$. It is clear that

$$\overline{g} \in \cap_{n=1}^{\infty} \overline{G}^{p^n} \gamma_n(\overline{G}) T(\overline{G})$$

because in the antipodal case by Lemma 3.12

$$\overline{g}^{|T(\overline{G})|} \in \cap_{n=1}^{\infty} \overline{G}^{p^n} \gamma_n(\overline{G}) = W_p(\overline{G}),$$

which is a contradiction, since the order of the element $\overline{g}$ is infinite. Therefore there exists an integer n such that $\overline{g} \in \overline{G}^{p^n} \gamma_n(\overline{G}) T(\overline{G})$. It is easy to see that $\widetilde{H} = \overline{G}/\overline{G}^{p^n} \gamma_n(\overline{G}) T(\overline{G})$ is a nilpotent p-group of finite exponent and $\overline{g}\overline{G}^{p^n} \gamma_n(\overline{G}) T(\overline{G})$ is a nontrivial element of $\widetilde{H}$. Therefore $\overline{G}/T(\overline{G})$ is a residually nilpotent p-group of finite exponent. Since $J_p(R) = 0$ and the class of nilpotent p-groups of finite exponent is closed under taking subgroup and finite direct product, from Lemma 2.1 and Theorem 2.2 it follows that $A^\omega(R\overline{G}/T(\overline{G})) = \overline{0}$. Since $R\overline{G})$ satisfies the conditions of Lemma 3.5, there exists $\overline{b} \in A(R\overline{G})$ with $A^\omega(R\overline{G})(1-\overline{b}) = 0$. Then $A^\omega(RG)(1-b) \subseteq I(D_\omega(RG))$ for a suitable element $b \in A(RG)$. If $c = 1 - t^{-1} \sum_{g \in D_\omega(RG)} g$ $(t = |D_\omega(RG)|)$ then $c \in A(RG)$ and the element $1 - a = (1-b)(1-c)$ satisfies the equality $A^\omega(RG)(1-a) = 0$.

Sufficiency is proved in Lemmas 3.2 and 3.10. The proof is complete.

References

[1] Bovdi, A. A., Group rings, UMK VO, KIEV, 1988.

[2] Nouazè, Y. and Gabriel, P., Indéaux primiers de l'algebra anveloppante d'une algebra de Lie nilpotente, *J. Algebra*, **6**, (1967), 77–99.

[3] Hartley, B., The residual nilpotence of wreath products, *Proc. London Math. Soc.*, **20** (3), (1970), 365–392.

[4] Király, B., The residual nilpotency of the augmentation ideal, *Publ. Math. Debrecen*, **45** 1–2, (1994), 133–144.

[5] Malcev, A. I., Generalized nilpotent algebras and their adjoint, groups, *Mat. Sbornik*, **25** (67), (1949), 347–366 (*Amer. Math. Soc. Transl.* **69** (2), (1968), 1–121).

[6] Parmenter, M .M. and Sehgal, S. K., Idempotent elements and ideals in group ring and the intersection theorem, *Arc. Math.*, **24**, (1973), 586–600.

[7] Passi, I. B., Group ring and their augmentation ideals, Lecture notes in Math., 715, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[8] Sehgal, S. K., Topics in group rings, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1978.

[9] Smith, P. F., On the intersection theorem, *London Math. Soc.*, **21**, (1970), 22–27.

Bertalan Király
Department of Mathematics and Informatics
Eszterházy Károly Teachers Training College
H-3301 Eger, Pf. 43., Hungary
E-mail: kiraly@gemini.ektf.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 75–79*

A MOMENT INEQUALITY FOR THE MAXIMUM PARTIAL SUMS WITH A GENERALIZED SUPERADDITIVE STRUCTURE

Tibor Tómács (EKTF, Hungary)

Abstract: F. A. Móricz, R. J. Serfling and W. F. Stout (1982) proved a moment inequality with superadditive function. The theorem of this paper extends this result to multidimensional sequence.

1. Notations

In the following $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ and d denotes the set of integers, positive integers, real numbers and a fixed positive integer. We define $\underline{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$ and if $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\underline{l} = (l_1, l_2, \dots, l_d) \in \mathbb{Z}^d$, $k_i \le l_i$ for each $1 \le i \le d$ then $\underline{k} \le \underline{l}$. The $\underline{k} < \underline{l}$ relation is defined similarly. If there exists an i index such that $k_i \ge l_i$ then we write $\underline{k} \not< \underline{l}$. Denote $|\underline{k}| = \prod_{i=1}^{d} k_i$ and let $\{X_{\underline{k}} \colon \underline{k} \in \mathbb{N}^d\}$ be a d-multiple sequence of random variables. $S_{\underline{n}}$ will denote the sum $\sum_{\underline{k} \le \underline{n}} X_{\underline{k}}$ if $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$, otherwise $S_{\underline{n}} = 0$. Finally $\mathbb{E}X$ will denote the expectation of the random variable X.

2. Preliminary results

Let $g \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ be a nonnegative function. If $g(i,j) + g(j+1,k) \le g(i,k)$ for all $1 \le i \le j < k$ then we say that g is superadditive. F. A. Móricz, R. J. Serfling and W. F. Stout (1982) proved the next theorem: If $\{X_l \colon l \in \mathbb{N}\}$ sequence of random variables, $\alpha > 1$, $r \ge 1$, g is a superadditive function and

$$\mathbb{E}\left|\sum_{l=i}^{j} X_l\right|^r \le g^\alpha(i,j)$$

for all $1 \le i \le j$ integers then there exists a constant $A_{\alpha,r}$ (what depends on α and r) such that for each $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\left(\max_{k \le n}\left|\sum_{l=1}^{k} X_l\right|\right)^r \le A_{\alpha,r} g^\alpha(1,n).$$

F. A. Móricz (1983) generalized the definition of superadditive function for d-dimension as follows. Let $g\colon \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ be a nonnegative function. If

$$g(\underline{i}, \hat{\underline{j}}) + g(\hat{\underline{i}}, \underline{j}) \leq g(\underline{i}, \underline{j}), \tag{2.1}$$

where $\underline{i}, \underline{j} \in \mathbb{N}^d$, $\underline{i} \leq \underline{j}$, $1 \leq l \leq d$, $i_l \leq k_l \leq j_l$ and

$$\begin{aligned} \hat{\underline{i}} &= (i_1, \dots, i_{l-1}, k_l + 1, i_{l+1}, \dots, i_d), \\ \hat{\underline{j}} &= (j_1, \dots, j_{l-1}, k_l, j_{l+1}, \dots, j_d) \end{aligned}$$

then we say that the g is superadditive. F. A. Móricz (1983) proved the next theorem what is generalization of the previous theorem. If g is a superadditive function, $\alpha > 1$, $r \geq 1$ and

$$\mathbb{E}\left|\sum_{\underline{i} \leq \underline{l} \leq \underline{j}} X_{\underline{l}}\right|^r \leq g^\alpha(\underline{i}, \underline{j}) \tag{2.2}$$

for all $\underline{i}, \underline{j} \in \mathbb{N}^d$, $\underline{i} \leq \underline{j}$ then there exists a constant $A_{\alpha,r,d}$ (what depends on α, r and d) such that

$$\mathbb{E}\left(\max_{\underline{k} \leq \underline{n}} |S_{\underline{k}}|\right)^r \leq A_{\alpha,r,d}\, g^\alpha(\underline{1}, \underline{n})$$

for all $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$. This paper discuss another generalization.

2. Main result

Theorem. *Let $g\colon \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ be a nonnegative function, $\alpha > 1$ and $r \geq 1$. Assume that for each $\underline{1} \leq \underline{i} \leq \underline{j} < \underline{k}$*

$$g(\underline{i}, \underline{j}) + g(\underline{j} + \underline{1}, \underline{k}) \leq g(\underline{i}, \underline{k}), \tag{3.1}$$

and

$$\mathbb{E}|S_{\underline{j}} - S_{\underline{i}-\underline{1}}|^r \leq g^\alpha(\underline{i}, \underline{j}). \tag{3.2}$$

Then

$$\mathbb{E}\left(\max_{\underline{k} \leq \underline{n}} |S_{\underline{k}}|\right)^r \leq A_{\alpha,r}\, g^\alpha(\underline{1}, \underline{n}) \tag{3.3}$$

for all $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ where $A_{\alpha,r} = \left(1 - \frac{1}{2^{(\alpha-1)/r}}\right)^{-r}$.

Remark. This theorem is generalization of result of F. A. Móricz, R. J. Serfling and W. F. Stout (1982). We remark that condition (2.1) implies (3.1) on the other hand if $X_{\underline{k}}$ ($\underline{k} \in \mathbb{N}^d$) nonnegative random variables then (3.2) implies (2.2) moreover the constant is not depending on d.

Proof of Theorem. Assume that $\underline{1} < \underline{N} = (N, N, \dots, N) \in \mathbb{N}^d$ and $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ where $\underline{n} \le \underline{N}$ and $\underline{n} \not< \underline{N}$. If $|\underline{j}| = 0$ then let $g(\underline{1}, \underline{j}) = 0$. With these notations, since

$$g(\underline{i}, \underline{j}) \le g(\underline{i}, \underline{j}) + g(\underline{j} + \underline{1}, \underline{k}) \le g(\underline{i}, \underline{k}) \quad \forall\ \underline{1} \le \underline{i} \le \underline{j} < \underline{k}, \tag{3.4}$$

there exists $m \ge 0$ integer having the property that

$$g(\underline{1}, \underline{m} - \underline{1}) \le \frac{1}{2} g(\underline{1}, \underline{n}) \le g(\underline{1}, \underline{m}), \tag{3.5}$$

where $\underline{m} = \underline{n} - m \cdot \underline{1}$. So if $\underline{m} < \underline{n}$ then

$$\frac{1}{2} g(\underline{1}, \underline{n}) + g(\underline{m} + \underline{1}, \underline{n}) \le g(\underline{1}, \underline{m}) + g(\underline{m} + \underline{1}, \underline{n}) \le g(\underline{1}, \underline{n}).$$

Consequently we have

$$g(\underline{m} + \underline{1}, \underline{n}) \le \frac{1}{2} g(\underline{1}, \underline{n}), \quad \text{if } \underline{m} < \underline{n}. \tag{3.6}$$

Let us define sets

$$\begin{aligned} B &= \{\underline{k} \in \mathbb{N}^d :\ \underline{k} < \underline{m}\} \\ C &= \{\underline{k} \in \mathbb{N}^d :\ \underline{k} \le \underline{n}, \underline{k} \not< \underline{m}, \underline{m} \not< \underline{k}\} \\ D &= \{\underline{k} \in \mathbb{N}^d :\ \underline{m} < \underline{k} \le \underline{n}\} \end{aligned}$$

Let $\underline{k}_1 \in D$ such that $|S_{\underline{k}_1}| = \max_{\underline{k} \in D} |S_{\underline{k}}|$. If $D = \emptyset$ (other words $\underline{m} = \underline{n}$) then let $\underline{k}_1 = \underline{m}$. Let $\underline{k}_2 \in C$ such that $|S_{\underline{k}_2}| = \max_{\underline{k} \in C} |S_{\underline{k}}|$. With these notations we have

$$\begin{aligned} \max_{\underline{k} \le \underline{n}} |S_{\underline{k}}| &= \max\{\max_{\underline{k} < \underline{m}} |S_{\underline{k}}|, |S_{\underline{k}_1}|, |S_{\underline{k}_2}|\} \le \\ &\max\{\max_{\underline{k} < \underline{m}} |S_{\underline{k}}|, |S_{\underline{m}}| + |S_{\underline{k}_1} - S_{\underline{m}}|, |S_{\underline{k}_2}|\} \le \\ &|S_{\underline{k}_2}| + \max\{\max_{\underline{k} < \underline{m}} |S_{\underline{k}}|, |S_{\underline{k}_1} - S_{\underline{m}}|\} \le \\ &|S_{\underline{k}_2}| + \left(\max_{\underline{k} < \underline{m}} |S_{\underline{k}}|^r + |S_{\underline{k}_1} - S_{\underline{m}}|^r\right)^{1/r}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

The Minkowski's inequality states that

$$(\mathbb{E}|X + Y|^r)^{1/r} \le (\mathbb{E}|X|^r)^{1/r} + (\mathbb{E}|Y|^r)^{1/r}$$

where X, Y random variables and $r \geq 1$. Therefore with $X = |S_{\underline{k}_2}|$ and $Y = \max\limits_{\underline{k} \leq \underline{n}} |S_{\underline{k}}| - |S_{\underline{k}_2}|$ substitutions the Minkowski's inequality and (3.7) imply

$$\mathbb{E}\left(\max_{\underline{k}\leq\underline{n}} |S_{\underline{k}}|^r\right)^{1/r} \leq \left(\mathbb{E}|S_{\underline{k}_2}|^r\right)^{1/r} + \left(\mathbb{E}\left|\max_{\underline{k}<\underline{n}} |S_{\underline{k}}| - |S_{\underline{k}_2}|\right|^r\right)^{1/r} \leq$$

$$\left(\mathbb{E}|S_{\underline{k}_2}|^r\right)^{1/r} + \left(\mathbb{E}(\max_{\underline{k}<\underline{m}} |S_{\underline{k}}|^r) + \mathbb{E}|S_{\underline{k}_1} - S_{\underline{m}}|^r\right)^{1/r}. \tag{3.8}$$

By condition (3.2) and (3.4) we get

$$\left(\mathbb{E}|S_{\underline{k}_2}|^r\right)^{1/r} \leq g^{\alpha/r}(\underline{1}, \underline{k}_2) \leq g^{\alpha/r}(\underline{1}, \underline{n}). \tag{3.9}$$

An elementary computation shows that $A_{\alpha,r} \geq 1$ so (3.2), (3.4) and (3.6) imply

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|S_{\underline{k}_1} - S_{\underline{m}}|^r \leq & g^{\alpha}(\underline{m}+\underline{1}, \underline{k}_1) \leq g^{\alpha}(\underline{m}+\underline{1}, \underline{n}) \leq \\ & \frac{1}{2^{\alpha}} g^{\alpha}(\underline{1}, \underline{n}) \leq A_{\alpha,r}\frac{1}{2^{\alpha}} g^{\alpha}(\underline{1}, \underline{n}),\end{aligned} \tag{3.10}$$

if $D \neq \emptyset$ (what means $\underline{m} < \underline{k}_1$).

After these we prove the theorem by d-dimensional induction.

$$\mathbb{E}(\max_{\underline{k}\leq\underline{1}} |S_{\underline{k}}|^r) = \mathbb{E}|S_{\underline{1}}|^r \leq g^{\alpha}(\underline{1}, \underline{1}) \leq A_{\alpha,r} g^{\alpha}(\underline{1}, \underline{1})$$

therefore $\underline{n} = \underline{1}$ satisfies (3.3). Now, assume that (3.3) is true if $\underline{n} < \underline{N}$. Thus (3.5) implies

$$\mathbb{E}(\max_{\underline{k}<\underline{m}} |S_{\underline{k}}|^r) \leq A_{\alpha,r} g^{\alpha}(\underline{1}, \underline{m}-\underline{1}) \leq A_{\alpha,r}\frac{1}{2^{\alpha}} g^{\alpha}(\underline{1}, \underline{n}). \tag{3.11}$$

Finally by (3.8), (3.9), (3.10) and (3.11) we obtain

$$\mathbb{E}(\max_{\underline{k}\leq\underline{n}} |S_{\underline{k}}|^r)^{1/r} \leq g^{\alpha/r}(\underline{1}, \underline{n}) + \left(A_{\alpha,r}\frac{1}{2^{\alpha-1}} g^{\alpha}(\underline{1}, \underline{n})\right)^{1/r} = A_{\alpha,r}^{1/r} g^{\alpha/r}(\underline{1}, \underline{n})$$

therefore (3.3) is true for each $\underline{n}$ with $\underline{n} \leq \underline{N}$ and $\underline{n} \not< \underline{N}$. This completes the proof of the theorem.

References

[1] F. A. Móricz, R. J. Serfling, W. F. Stout, Moment and probability bounds with quasi-superadditive structure for the maximum partial sum, *The Annals of Probability* **Vol. 10, No.4** (1982), 1032–1040.

[2] F. A. Móricz, A general moment inequality for the maximum of the rectangular partial sums of multiple series, *Acta Math. Hung.*, **41 (3–4)** (1983), 337–346.

Tibor Tómács
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers' Training College
Leányka str. 4–6.
H-3300 Eger, Hungary

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 81–86*

ON THE SHAPE MODIFICATION OF PARAMETRIC CUBIC ARCS

Imre Juhász (University of Miskolc, Hungary)

Abstract: A standard specification of cubic parametric arcs is the Hermite form, when the arc is given by its end-points and tangent vectors (derivatives with respect to the parameter) at them. At first, we examine how the points of an arc change their positions if we scale the end-tangents, then we show how one can achieve prescribed shape modification by means of the alteration of the length of the end-tangents or the parameter range. By prescribed shape modification we mean such an alteration when a chosen point of the arc is carried into a predefined point.

1. Introduction

By cubic parametric arcs we mean arcs of the form

$$\mathbf{r}\left(u\right)=\mathbf{r}_3u^3+\mathbf{r}_2u^2+\mathbf{r}_1u+\mathbf{r}_0,\ u\in\left[u_0,u_1\right]\subset\Re,$$
$$\mathbf{r}_i\in\Re^d,\ \left(d=2,3;\ i=0,\ldots,3\right).$$

Cubic parametric curves play an important role in computer aided geometric design (CAGD), since this is the lowest degree polynomial curve by means of which one can describe twisted curves and plane curves with singularity, such as inflection, cusp or loop. There are numerous publications on parametric cubics. In [1] and [3] there is a summary of their different representations and properties, whereas [4] deals with the detection of singularity.

One of the most well-known specifications of parametric cubic arcs is the so called Hermite form, when the arc is specified by its end-points and tangent vectors (derivatives with respect to the parameter) at them. In general, the parameter range is $[0,1]$. The change of the parametrization $t\in[0,1]$ to $v\in[a,b]$, i.e. the affine parameter transformation $t\left(v\right)=\left(v-a\right)/\left(b-a\right)$, modifies the shape of the arc, if the end-conditions are unchanged. This shape modification is equivalent to the one, gained by the uniform scaling of end-tangents by the factor $1/\left(b-a\right)$. In the forthcoming sections we study shape modifications obtained by the scaling of the end-tangents.

2. Changing the length of end-tangents

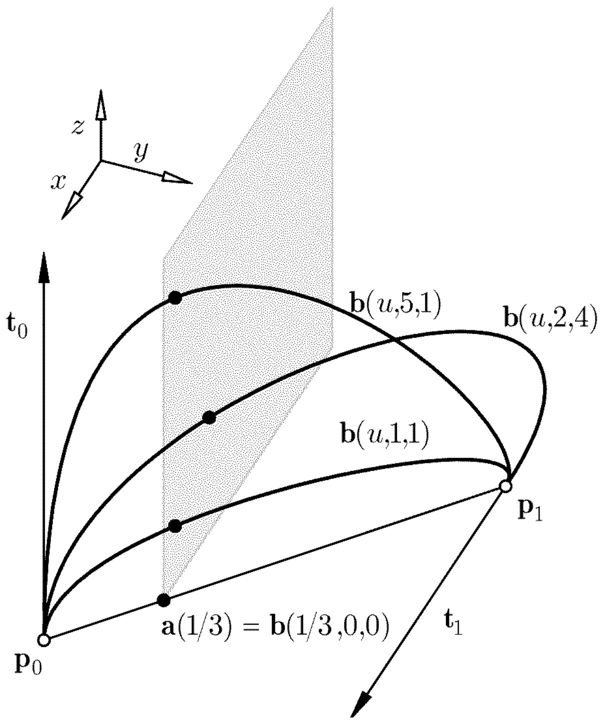


Figure 1: The $\mathbf{b}\left(u, \lambda_0, \lambda_1\right)$ arcs

We assume that the arc is given by its end-points $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ and end-tangents $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ moreover, the parameter range is $[0,1]$. The Bézier points (cf. [2]) of the arcs to be studied are

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{p}_0,\ \mathbf{b}_1 = \mathbf{p}_0 + \frac{\lambda_0}{3}\mathbf{t}_0,\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{p}_1 - \frac{\lambda_1}{3}\mathbf{t}_1,\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{p}_1,$$
$$\lambda_0, \lambda_1 \in \Re$$

and their Bézier representation is

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\left(u, \lambda_0, \lambda_1\right) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b}_i B_i^3(u) &= \mathbf{p}_0 \left(B_0^3(u) + B_1^3(u)\right) + \\ &\mathbf{p}_1 \left(B_2^3(u) + B_3^3(u)\right) + \frac{\lambda_0}{3}\mathbf{t}_0 B_1^3(u) - \frac{\lambda_1}{3}\mathbf{t}_1 B_2^3(u), \\ &u \in [0,1],\ \lambda_0, \lambda_1 \in \Re,\end{aligned}$$

where $B_i^3(u) = \binom{3}{i} u^i (1-u)^{3-i}$, $(i = 0, \ldots, 3)$ is the i^{th} cubic Bernstein polynomial. Introducing the notation

$$\mathbf{a}(u) = \mathbf{p}_0 \left(B_0^3(u) + B_1^3(u)\right) + \mathbf{p}_1 \left(B_2^3(u) + B_3^3(u)\right)$$

we obtain

$$\mathbf{b}(u, \lambda_0, \lambda_1) = \mathbf{a}(u) + \frac{\lambda_0}{3} \mathbf{t}_0 B_1^3(u) - \frac{\lambda_1}{3} \mathbf{t}_1 B_2^3(u) \tag{1}$$

where $\mathbf{a}(u)$ is the convex linear combination of the points $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$, since

$$B_0^3(u) + B_1^3(u) = 1 - \left(B_2^3(u) + B_3^3(u)\right)$$

consequently, $\mathbf{a}(u)$ describes the straight line segment bounded by $\mathbf{p}_0$ and $\mathbf{p}_1$.

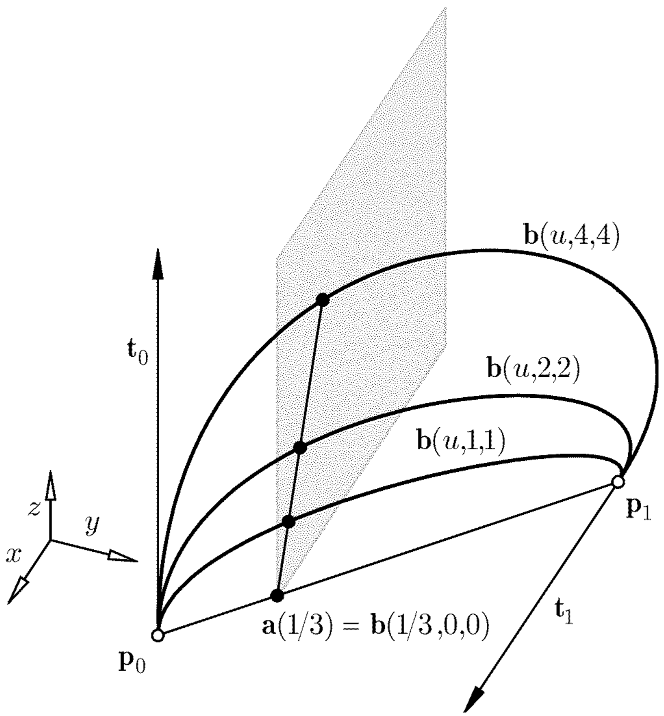


Figure 2: The $\mathbf{b}(u, \lambda, \lambda)$ family of curves

Now, we study the point of the arc that corresponds to an arbitrarily chosen parameter value $\tilde{u} \in (0, 1)$. Based on equation (1), one can see that the points $\mathbf{b}(\tilde{u}, \lambda_0, \lambda_1)$ of the arc are in the plane which is parallel to the end-tangents $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ and intersects the straight line segment $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ at the point $\mathbf{a}(\tilde{u})$ (see Figure 1). In the $\mathbf{t}_0 \parallel \mathbf{t}_1$ special case the points $\mathbf{b}(\tilde{u}, \lambda_0, \lambda_1)$ are on the line that is parallel to the vector $\mathbf{t}_0$ (or $\mathbf{t}_1$) and passes through the point $\mathbf{a}(\tilde{u})$.

If we multiply the end-tangents by the same factor, i.e. $\lambda = \lambda_0 = \lambda_1$ then that part of equation (1) which depends on λ is

$$\frac{\lambda}{3}\left(\mathbf{t}_0 B_1^3(u) - \mathbf{t}_1 B_2^3(u)\right) = \lambda u(1-u)\left((1-u)\mathbf{t}_0 - u\mathbf{t}_1\right),$$

thus the direction of the joining line of $\mathbf{b}(u,\lambda,\lambda)$ and $\mathbf{a}(u)$ is a convex linear combination of the vectors $\mathbf{t}_0$ and $-\mathbf{t}_1$. For an arbitrarily chosen parameter value $\tilde{u} \in (0,1)$ the curve points $\mathbf{b}(\tilde{u},\lambda,\lambda)$ are on a straight line which intersects the straight line segment $\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1$ and parallel to the plane direction determined by $\mathbf{t}_0$ and $\mathbf{t}_1$. (The direction of such lines ranges from $\mathbf{t}_0$ to $\mathbf{t}_1$, cf. Figure 2.) The same effect can be obtained by means of an affine parameter transformation, since the $[0,1] \longrightarrow [a,b]$ transformation results in the uniform scaling of end-tangents by the scaling factor $\lambda = 1/(b-a)$.

3. Prescribed shape modification

Given a parametric cubic arc $\mathbf{r}(u), u \in [a,b]$ by its end-points $\mathbf{p}_0$,$\mathbf{p}_1$ and end-tangents $\mathbf{t}_0$,$\mathbf{t}_1$. By the alteration of the length of end-tangents, we want to modify the shape of the arc in such a way, that its arbitrarily chosen point $\mathbf{r}(\tilde{u}), \tilde{u} \in (a,b)$ should be carried into the predefined point $\mathbf{p}$, i.e. $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\tilde{u},\lambda_0,\lambda_1)$ is the expected result.

i) End-tangents are not parallel

If $\mathbf{t}_0$ is not parallel to $\mathbf{t}_1$ a solution to the problem above exists if and only if the point $\mathbf{p}$ is in the plane which is parallel to $\mathbf{t}_0$ and $\mathbf{t}_1$, and passes through the point $\mathbf{a}(\tilde{u})$. (Certainly, this condition is always fulfilled in case of plane curves.) The corresponding values of λ_0 and λ_1 can be obtained from the coordinates of $\mathbf{p}$ in the affine coordinate system $\mathbf{a}(\tilde{u}), \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$. We denote these coordinates by μ_0 and μ_1, i.e.

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}(\tilde{u}) + \mu_0\mathbf{t}_0 + \mu_1\mathbf{t}_1.$$

Comparing this with equation (1) we obtain

$$\lambda_0 = \frac{3\mu_0}{B_1^3(\tilde{u})} \text{ and } \lambda_1 = \frac{-3\mu_1}{B_2^3(\tilde{u})}.$$

If instead of the constraint $\mathbf{r}(\tilde{u}) \longrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{r}(\tilde{u},\lambda_0,\lambda_1)$ we apply a looser condition $\mathbf{r}(u) \longrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{r}(u,\lambda_0,\lambda_1)$ for some $u \in (a,b)$, i.e. the modified curve should pass through the point $\mathbf{p}$ at some unknown parameter value u, then we have a solution to the problem if the point $\mathbf{p}$ is between the pair of parallel planes which are parallel to the end-tangents $\mathbf{t}_0$,$\mathbf{t}_1$ and pass through the points $\mathbf{p}_0$ and $\mathbf{p}_1$. In this case we take a plane through the point $\mathbf{p}$ parallel to $\mathbf{t}_0$ and $\mathbf{t}_1$. Let $\tilde{u}$ be the parameter value which corresponds to the intersection point of this plane and the arc. By means of this $\tilde{u}$ the $\mathbf{r}(\tilde{u}) \longrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{r}(\tilde{u},\lambda_0,\lambda_1)$ shape modification is always feasible.

In case of plane curves, this looser constraint provides a free parameter, that enables us to fulfill an additional condition, such as tangent direction or curvature.

If $\mathbf{t}_0$ is not parallel to $\mathbf{t}_1$ and we apply the restriction $\lambda = \lambda_0 = \lambda_1$, there can only be a solution to the task $\mathbf{r}(\tilde{u}) \longrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{r}(\tilde{u}, \lambda, \lambda)$ if the point $\mathbf{p}$ is on the joining line of $\mathbf{a}(\tilde{u})$ and $\mathbf{r}(\tilde{u})$. This shape modification can also be obtained by an affine parameter transformation.

The $\mathbf{r}(u) \longrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{r}(u, \lambda, \lambda), u \in (a, b)$ shape modification can have a solution if the points $\mathbf{a}_0, \mathbf{q}, \mathbf{p}$ are collinear, where $\mathbf{a}_0$ and $\mathbf{q}$ are the intersection points of the plane determined by $\mathbf{p}, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ with the straight line segment $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ and the arc $\mathbf{r}(u)$ respectively. In the planar case we have to find a u value for which the points $\mathbf{a}_0, \mathbf{q}, \mathbf{p}$ are collinear.

ii) Parallel end-tangents

In the case $\mathbf{t}_0 \parallel \mathbf{t}_1$, the $\mathbf{r}(\tilde{u}) \longrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{r}(\tilde{u}, \lambda_0, \lambda_1)$ shape modification is feasible if $\mathbf{p} - \mathbf{r}(\tilde{u}) \parallel \mathbf{t}_0$ (or $\mathbf{t}_1$). The $\mathbf{r}(u) \longrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{r}(u, \lambda_0, \lambda_1)$ and $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u, \lambda, \lambda), u \in (a, b)$ modifications can always be performed provided, the point $\mathbf{p}$ is between the parallel end-tangent lines.

From the discussions above, we can obtain those special cases as well when only one of the end-tangents can be scaled.

4. Conclusions

In this paper we have examined how the scaling of end-tangents effects the shape of Hermite arcs. Based on these observations, we have detailed the shape modifications of parametric cubic arcs which can be obtained by scaling the end-tangents and by affine parameter transformations.

Note, that the results of section 3 also provide a constructive solution and a solvability criterion to the following interpolation problem:
Given the end-points, end-tangent directions and an additional point (either in plane or in space).
Find a parametric cubic arc that passes through the point and fulfills the end-conditions.

References

[1] Böhm, W., On cubics: A survey, *Computer Graphics and Image Processing*, **19** (1982), 201–226.

[2] Farin, G., Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, Academic Press, 1988.

[3] Patterson, R. R., Parametric cubics as algebraic curves, *Computer Aided Geometric Design*, **5** (1988), 139–159.

[4] Stone, M. C. de Rose, T. D., A geometric characterization of parametric cubic curves, *ACM Transactions on Graphics*, **8** (1989), 147–163.

Imre Juhász
Department of Descriptive Geometry
University of Miskolc
Egyetemváros
H-3515 Miskolc, Hungary
E-mail: agtji@gold.uni-miskolc.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 87–98*

EXPONENTIAL STABILITY OF REGULAR LINEAR SYSTEMS ON BANACH SPACES

Tran Thi Loan (Hanoi, Vietnam)

Abstract: The article deals with the vd-transformation in Banach space and its application in studying the stability of trivial solution of differential equations. A sufficient condition of exponential stability of regular linear systems with burfication on Banach space will be proved.

vd-transformation and it's properties

In this section we shall give the definition, examples and some properties of a vd-transformation on Banach spaces. It is an expansion of a vd-transformation on finite dimension spaces given by Yu. S. Bogdanov ([2]–[6]). From that, we shall give the definition of regular linear equations which are applied to study the stability of regular linear equations with burfication on Banach spaces.

Let E be a Banach space and G be an open simple connected domain containing the origin O of E.

We define H as follows $H = G \times \mathbf{R} = \{\eta = (x,t)\colon\ x \in G, \quad t \in \mathbf{R}\}$.

Let $v_0\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ be a function which is continuous, monotone strictly increasing and satisfies the following conditions:

$$v_0(0) = 0; \quad v_0(t) \to +\infty \quad \text{as} \quad t \to +\infty.$$

Let $d\colon \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ be a given real function of two variables: and d satisfies the following conditions for all $\gamma > 0, \gamma_3 > \gamma_2 > \gamma_1 > 0$;

(d_1) $d(\gamma_2,\gamma_1) = -d(\gamma_1,\gamma_2)$,

(d_2) $d(\gamma_2,\gamma) > d(\gamma_1,\gamma)$,

(d_3) $d(\gamma_3,\gamma_2) + d(\gamma_2,\gamma_1) \geq d(\gamma_3,\gamma_1)$,

(d_4) $\cup_{\gamma\in\mathbf{R}_+}\{d(\gamma,\gamma_1)\} = \mathbf{R}$.

Suppose that, $l\colon H \to H$ is a diffeomorphism,

$$\eta = (x,t) \mapsto \eta' = (x',t')$$

satisfying the following equalities:

$$l(0,t) = (0,t), \qquad l(x,t) = (x',t)$$

for all $t \in \mathbf{R}$. It is easy to prove that the set L of all those transformations $L = \{l\}$ is a group with the composition of maps.

Let v be a real function

$$v\colon H^\star \to \mathbf{R}_+, \quad \eta = (x,t) \to v(\eta) = v_0(\|x\|)$$

where $H^\star = G^\star \times \mathbf{R} = (G \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}$.

Since the function $v\colon H^\star \to \mathbf{R}_+$ is independent of t, that is, $v(x,t) = v(x,t')$ for all $t, t' \in \mathbf{R}$, we can denote by $v(x)$ the value of $v(x,t)$ for any $x \in G^\star$ and $t \in \mathbf{R}$.

Definition. The transformation $l \in L$ is called vd-transformation iff

$$\sup_{\eta \in H^\star} |d\{v(\eta), v[l(\eta)]\}| < +\infty \tag{1}$$

From the definition of function d, we also have

$$\sup_{\eta' \in H^\star} \left| d\left\{ v(\eta'), v(l^{-1}(\eta')) \right\} \right| < +\infty.$$

Consequently, if we denote by L_{vd} the set of vd-transformation then it is a subgroup of L.

Examples

1. Suppose $v_0(x,t) = \|x\|, d_0(\gamma_1,\gamma_2) = ln\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, and $l(x,t)$ (with a fixed t) is a linear transformation having bounded partial derivation with respect to t. Then, l is $v_0 d_0$-transformation if and only if it's a Lyapunov transformation ([1]).
2. If $v(x,t) = |x|^2; E = \mathbf{R}$

$$d(\gamma_1,\gamma_2) = \begin{cases} \sqrt{\gamma_1} - \sqrt{\gamma_2} & \text{if } \gamma_1 \cdot \gamma_2 \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma_2}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} & \text{if } \gamma_1 \cdot \gamma_2 < 1, \end{cases}$$

then all conditions from d_1 are satisfied. So

$$l(x,t) = (x + \frac{1}{2} \sin t \sin^2 x, t)$$

is a vd-transformation.

From example 1, we can see that a vd-transformation is an expansion of Lyapunov transformation, but it still keeps an important property, stability of the trivial solution of a following differential equation on the Banach space E:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,t) \\ f(0,t) \equiv 0 \end{cases} \tag{2}$$

We denote by $x(t;\xi)$ the solution of equation (2) which satisfies the initial condition $x(t_0,\xi)=\xi$ and suppose that

$$\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{\substack{\|\xi\|\le\varepsilon\\ t\ge t_0}} \|(x(t;\xi)\|; \lambda_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{\substack{v(\xi)\le\varepsilon\\ t\ge t_0}} v(x(t;\xi)).$$

Definition. ([7]). The solution $x=0$ of differential equation (2) is said to be Lyapunov stable if for any $\varepsilon>0$ there exists $\delta(\varepsilon)>0$ such that for each solution $x(t)$ of (2), with its initiala value $x(t_0)=\xi$ satisfying the condition $\|\xi\|<\delta(\varepsilon)$

then the inequality $\|x(t,\xi)\|<\varepsilon$ holds for all $t\ge t_0$.

From the definition we can see that the solution $x=0$ of differential equation (2) is stable iff $\lambda=0$.

Proposition 1. *$\lambda=0$ if and only if $\lambda_1=0$.*

Proof. By the continuity of the function v we immediately have $\lim\limits_{\xi\to 0} v(\xi)=0$. Since $v(\|x\|)$ is monotone strictly increasing we can deduce $\lim\limits_{v(\xi)\to 0}\xi=0$. Therefore

$$\lim_{k\to\infty}\xi_k=0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} v(\xi_k)=0. \tag{3}$$

We assume that $\lambda=0$, then:

$$\lim_{k\to\infty}\|x(t_k,\xi_k)\|=0$$

for all sequences $\{\varepsilon_k\}\subset\mathbf{R}_+:\ \varepsilon_k\to 0; \{\xi_k\}\subset E:\ \|\xi_k\|<\varepsilon_k$ and $\{t_k\}\subset\mathbf{R}, t-k\ge t_0$. Because of (3), we have

$$\lim_{k\to\infty}\|x(t_k,\xi_k)\|=0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} v\left(x\left(t_k,\xi_k\right)\right)=0.$$

It follows that $\lambda=0\Leftrightarrow\lambda_1=0$.

Proposition 2. *A vd-transformation conserves the stability of trivial solution $x=0$ of differential equation (2).*

Proof. By the vd-transformation

$$(x,t)\to l(x,t)=(y,t),$$

the equation (2) is transformed to the following one:

$$\frac{dy}{dt}=g(y,t) \tag{4}$$

By assumption, the solution $x = 0$ of equation (2) is stable, that means:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{\substack{\|x_0\|\le\varepsilon \\ t\ge t_0}} \|x(t;x_0)\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{\substack{v(x_0)\le\varepsilon \\ t\ge t_0}} v[x(t;x_0)] = 0.$$

If the solution $y = 0$ of (4) is unstable, then

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{\substack{v(y_0)\le\varepsilon \\ t\ge t_0}} v\left[y\left(t,y_0\right)\right] > 0.$$

It means that there exists a positive number δ such that

(5) $$\exists\{\eta_n\} \subset E:\ \eta_n \to 0;\ \exists\{t_n\} \subset \mathbf{R}_+:\ t_n \ge t_0;\ \forall nN:\ v\left[y\left(t_n;\eta_n\right)\right] \ge \delta.$$

Since $v\left[x\left(t_n,\xi_n\right)\right] \to 0$ as $n \to \infty$, where $\xi_n, t_n) = l^{-1}(\eta_n, t_n)$ one could say

(6) $$v\left[x\left(t_n;\xi_n\right)\right] < \delta, \forall n \in N.$$

From (5), (6) and d_4) we deduce:

$$|d\{v\left[x\left(t_n;\xi_n\right)\right], v\left[y\left(t_n;\eta_n\right)\right]\}| = d\{v\left[y(t_n;\eta_n)\right], v\left[x\left(t_n;\xi_n\right)\right]\}$$

$$> d\{\delta, v\left[x\left(t_n;\xi_n\right)\right]\} \to +\infty \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Consequently

$$\sup_{n\in N} |d\{v\left[x\left(t_n;\xi_n\right)\right], v\left[l\left(x\left(t_n;\xi_n\right)\right)\right]\}| = +\infty$$

that contradicts the definition of 1.

Regular system

Definition. A transformation $l \in L$, satisfying the following condition for all $\eta \in H^\star$:

$$d\{v\left(\eta\right), v\left[l\left(\eta\right)\right]\} = o(t) \quad \text{as} \quad t \to \pm\infty,$$

is called a generalized vd-transformation.

Definition. A transformation $y = L(t)x$ is a generalized Lyapunov one if:

(7) $$\chi\left[L\left(t\right)\right] = \chi\left[L^{-1}\left(t\right)\right] = 0$$

where $\chi\left[L\left(t\right)\right] := \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} ln\|L(t)\|$ is called characteristic exponent of L(t).

By definition we immediately have following remarks:

Remark 1. Generalized Lyapunov transformations conserve Lyapunov exponents [1].

Remark 2. A generalized Lyapunov transformation is generalized vd-transformation when

$$v(x) = \|x\|, d(\gamma_1, \gamma_2) = ln\frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

and l is homogeneously linear for x (where $l(x,t) = (L(t)x, t)$).

Now we shall prove a necessary and sufficient condition for which a differential system on finite dimension spaces are regular. Since this condition plays an important role for the conception of a regular differential equations on Banach spaces and we could not find it in literature, we shall formulate it as a lemma.

We consider the following linear differential system:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{8}$$

where $x \in \mathbf{R}^n, A(t) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ and is real continuous for all $t \in \mathbf{R}$ and $\sup \|A(t)\| < \infty$.

Let $X(t)$ be a normal fundamental matrix of (8) and $\sigma_x = \sum\limits_{k=1}^{m} n_k \alpha_k$ be the sum of all its exponent numbers ([1]).

Definition. ([1]) The linear system (8) is said to be regular iff

$$\sigma_x = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau) d\tau.$$

Lemma. *A necessary and sufficient condition that the system (8) to be regular one is there exists a generalized Lyapunov transformation carrying the system (8) to the system with constant matrix $B \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$:*

$$\frac{dy}{dt} = By \tag{9}$$

Proof. Let $y = L(t)x$ be a generalized Lyapunov transformation, $X(t)$ be a normal fundamental matrix of system (8). It follows that $Y(t) = L(t)X(t)$ is a fundamental matrix of system (9). Since

$$\det Y(t) = \det L(t) \det X(t),$$

we have

$$\det Y(t_0)\exp(t-t_0)\operatorname{Sp} B = \det L(t)\det X(t_0)\exp\int\limits_{t_0}^{t}\operatorname{Sp} A(t_1)dt_1$$

$$\exp\int\limits_{t_0}^{t}\operatorname{Sp} A(t_1)dt_1 = |c\,(t_0)|\left|\det L^{-1}(t)\right|\exp\left[(t-t_0)\operatorname{Sp} B\right],$$

$$\text{where}\quad c(t_0) = \det\left[Y(t_0)X^{-1}(t_0)\right],$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t}\operatorname{Sp} A(t_1)dt_1 = \frac{1}{t}ln\,|c(t_0)| + \frac{1}{t}ln\left|\det L^{-1}(t)\right| + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)\operatorname{Sp} B$$

$$\Rightarrow\quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t}\operatorname{Sp} A(t_1)dt_1 = \operatorname{Sp} B + \chi\left[\det L^{-1}(t)\right].$$

Because of $\chi\left[L^{-1}(t)\right] = 0$ we have

$$\chi\left[\det L^{-1}(t)\right] \le n\chi\left[L^{-1}(t)\right] = 0$$

Analogously, from $\chi\left[L(t)\right] = 0$ it follows that

$$\chi\left[\det L(t)\right] \le 0$$

On the other hand, since

$$\det L(t).\det L^{-1}(t) = 0,$$

the following is held: $\chi\left[\det L(t)\right] + \chi\left[\det L^{-1}(t)\right] \ge 0$.

Therefore $\chi\left[\det L(t)\right] = \chi\left[\det L^{-1}(t)\right] = 0$

It follows from these equalities that

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}ln\left|\det L^{-1}(t)\right| = 0$$

and finally

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t}\operatorname{Sp} A(t_1)dt_1 = \operatorname{Sp} B.$$

Since the Lyapunov transformation conserves Lyapunov exponents and the X is normal, Y is normal too and

$$\sigma_x = \sigma_y = \operatorname{Sp} B,$$

we have

$$\sigma_x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(t_1) dt_1,$$

i.e. the system (8) is regular.

Conversely, let the system (8) be regular. We will denote by $X(t)$ the fundamental normal matrix of (8), which has the exponent numbers: $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$. Consider the Jordan matrix B, in which $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ are elements on the diagonal.

Denoting $Y(t)$ the fundamental normal matrix of the system (9), we constate that the column of which has the same exponent numbers (with the same order): $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Putting $L(t) = Y(t)X^{-1}(t)$ we will prove that $y = L(t)x$ is a generalized Lyapunov transformation.

Suppose that

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \ldots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \ldots & y_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Tdilehen $\chi\left[y^{(k)}\right] = \lambda_k$, where $y^{(k)}(t) = \operatorname{colon}(y_{1k}(t)\ldots y_{nk}(t))$.

Because of the regularity of (8), we have $\chi\left[x^{(k)}(t)\right] = -\lambda_k$, where $x^{(k)}(t) = (x_{k1}(t)\ldots x_{kn}(t))$.

We consider now the diagonal matrix

$$\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

We find then

$$L(t) = Y(t)e^{-t\Delta}e^{t\Delta}X^{-1}(t) = \phi(t)\Psi(t)$$

in which $\phi(t) = Y(t)e^{-t\Delta}, \Psi(t) = e^{t\Delta}X^{-1}(t)$. It follows that

$$\chi\left[\phi(t)\right] = \max_{j,k} \chi\left[y_{jk}(t)e^{-\lambda_k t}\right] = 0$$

$$\chi\left[\Psi(t)\right] = \max_{j,k} \chi\left[x_{j,k}(t)e^{\lambda_j t}\right] = 0.$$

Consequently,

$$\chi\left[L(t)\right] \le \chi\left[\phi(t)\right] + \chi\left[\Psi(t)\right] = 0$$

Analogously we can prove that $\chi\left[L^{-1}(t)\right] \le 0$.

However, from $L(t) \cdot L^{-1}(t) = E$, we immediately find that $\chi\left[L(t)\right] + \chi\left[L^{-1}(t)\right] \ge 0$, i.e. $\chi\left[L(t)\right] = \chi\left[L^{-1}(t)\right] = 0$. The lemma is proved.

Definition. A linear differential equation:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{10}$$

where $A(t) \in \mathcal{L}(E, E)$ and is continuous for all $t \in \mathbf{R}$ and $\sup_t \|A(t)\| < \infty$, is said to be regular one iff there is a generalized Lyapunov transformation $y = L(t)x$ carrying which to the linear differential equation with constant operator:

$$\frac{dy}{dt} = By. \tag{11}$$

Now we shall give a main theorem to regular differential equations on Banach spaces.

Let consider differential equation

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(x, t), \tag{12}$$

where $A(t) \in \mathcal{L}(E, E)$ and $\sup_{t \in \mathbf{R}} \|A(t)\| < \infty, f \in C^{(1,0)}(E \times \mathbf{R}), f(0, t) \equiv 0,$

$$\|f(x, t)\| \le \Psi(t)\|x\|^m \quad (m > 1); \quad \chi[\Psi(t)] = 0.$$

Under these conditions, we show the following theorem:

Theorem. *If the equation (10) is regular and all its characteristic exponents are not larger than $-\lambda < 0$, the trivial solution $x = 0$ of the equation (10) is exponential stability* ([7])*. I.e there exist $N > 0, A > 0$ such that*

$$\|x(t)\| \le Ae^{-N(t-t_0)}\|x(t_0)\|$$

for all solutions $x(t)$ *of* (12).

Proof. We denote by $X(t)(X(t_0) = Id_E)$ its Cauchy operator of equation (10) ([7], p. 147).

1. First we will estimate the resolvant operator $K(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$ $(t_0 \leq \tau \leq t)$.

Because of the regularity of the equation (10), there is a generalized Lyapunov transformation $y = L(t)x$ carrying equation (10) to equation (11).

We have $Y(t) = L(t)X(t)$ is resolvant operator of the equation (11).

If we put $H(t,\tau) = Y(t)Y^{-1}(\tau)$ then $K(t,\tau) = L(t)H(t,\tau)L^{-1}(\tau)$.

Suppose that all characteristic exponents of the equation (10) are not larger than α.

Hence all those of the equation (11) are not too than α, that is for every solution $y(t) = Y(t)y_0$ and $\varepsilon > 0$ there exists $c > 0$ we have

$$\|y(t)\| \leq ce^{(\alpha+\varepsilon/2)t}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Then, the operator's family $\left\{e^{-(\alpha+\varepsilon/2)t}Y(t), t \geq t_0\right\}$ is point-bounded.

By virtue of the Banach–Steinhauss there exists $c_1, > 0$ such that:

$$\|e^{(-\alpha+\varepsilon/2)t}Y(t)\| \leq c_1 \Leftrightarrow \|Y(t)\| \leq c_1 e^{(\alpha+\varepsilon/2)t}.$$

Therefore $\|H(t,\tau)\| = \|Y(t-\tau\| \leq c_1 e^{(\alpha_\varepsilon/2)(t-\tau)}$ for the equation with constant operator (11)

On the other hand

$$\chi\left[L(t)\right] = \chi\left[L^{-1}(t)\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \|L(t)\| \leq c_2 e^{\frac{\varepsilon}{2}t} \\ \|L^{-1}(\tau)\| \leq c_3 e^{\frac{\varepsilon}{2}\tau}. \end{cases}$$

It follows that

$$\|K(t,\tau)\| \leq \|L(t)\|\|H(t,\tau)\|\|L^{-1}(\tau)\|$$

(13)

$$\leq c_1c_2c_3e^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)}e^{\varepsilon\tau} = c(\varepsilon,t_0)e^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)}$$

where $c = c_1c_2c_3e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau}$.

Since $K(t,t_0) = X(t)$ we have

$$\|X(t)\| \leq ce^{(\alpha+\varepsilon)t} \tag{14}$$

In the case, when $\alpha < 0$, there exists a positive number ε such that $\alpha + \varepsilon \le 0$, whence

$$\|K(t,\tau)\| \le ce^{\varepsilon t}, \quad \|X(t)\| \le c. \tag{15}$$

2. We will now prove the theorem. Denoting

$$y = \chi e^{\gamma(t-t_0)} \tag{16}$$

where γ is a positive number such that $0 < \gamma < \lambda$, the equation (12) will be transformed to:

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + g(t,y) \tag{17}$$

with $B(t) = A(t) + \gamma Id_E$

$$g(t,y) = \exp(\gamma(t-t_0))f\left(t, ye^{-\gamma(t-t_0)}\right). \tag{18}$$

Now we show that the equation

$$\frac{d\eta}{dt} = B(t)\eta \tag{19}$$

is regular. Indeed, by the regularity of (10) there is a generalized Lyapunov transformation $z = L(t)x$ carrying (10) to the equation with constant operator:

$$\frac{dz}{dt} = Cz$$

where

$$C = L'(t)L^{-1}(t) + L(t)A(t)L^{-1}(t).$$

The transformation $\xi = L(t)\eta$ implies the following:

$$\frac{d\xi}{dt} = \left[L'(t)L^{-1}(t) + L(t)B(t)L^{-1}(t)\right]\xi = (C + \gamma Id_E)\,\xi.$$

The regularity of (19) is proved.

We denote by $\eta(t)$ the solution of (19) and then $e^{-\gamma(t-t_0)}\eta(t)$ is the solution of (10).

This implies:

$$\chi\left[\eta(t)e^{-\gamma(t-t_0)}\right] \le -\lambda$$

$$\Rightarrow \chi\left[\eta(t)\right] \le \chi\left[e^{\gamma(t-t_0)}\right] + \chi\left[\eta(t)e^{-\gamma(t-t_0)}\right] \le -\lambda + \gamma < 0.$$

By virtue of the estimation of the resolvant operator the following inequality is true:

$$\|K(t,\tau)\| \le Ne^{\varepsilon\tau}; \quad t_0 \le \tau < \infty,$$

where $K(t,\tau)$ is the resolvant operator of (10).

Now considerint the solution of (17)

$$y(t) = K(t,t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)g(\tau, y(\tau))d\tau,$$

we have

$$\|y(t)\| \le \|K(t,t_0)\| \cdot \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|K(t,\tau)\| \cdot \|g(\tau, y(\tau))\| d\tau$$

$$\le Ne^{\varepsilon(t_0)}\|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} Ne^{\varepsilon\tau}e^{\gamma(\tau-t_0)}\Psi(\tau)\|y(\tau)\|^m e^{-m\gamma(\tau-t_0)}d\tau$$

$$\le Ne^{\varepsilon t_0}\|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} Ne^{\varepsilon\tau}e^{(1-m)\gamma(\tau-t_0)}ce^{\varepsilon\tau}\|y(\tau)\|^m d\tau$$

$$= c_1\|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} c_2 e^{[2\varepsilon-(m-1)\gamma](\tau-t_0)}\|y(\tau)\|^m d\tau$$

where $c_1 = Ne^{\varepsilon t_0}, c_2 = cNe^{-2\varepsilon t_0}$.

Hence

$$\|y(t)\| \le c_1\|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} c_2 e^{-\delta(\tau-t_0)}\|y(\tau)\|^m d\tau, \tag{20}$$

where $\delta = (m-1)\gamma - 2\varepsilon$.

We will find the positive number ε such that $\delta > 0$.

Since

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\delta(\tau-t_0)}d\tau = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}e^{-\delta(t-t_0)} < \frac{1}{\delta}$$

there is $\Delta > 0$ such that

$$N = (m-1)c_1^{m-1}\|y(t_0)\|^{m-1}\int\limits_{t_0}^{t} c_2 e^{-\delta(\tau - t_0)}d\tau < 1$$

provided that

$$\|y(t_0)\| < \Delta.$$

We apply here the lemma of Bihari [8] and find

$$\|y(t)\| \leq \frac{c_1\|y(t_0)\|}{[1-N]^{\frac{1}{m-1}}} = A\|y(t_0)\|, A = \frac{c_1}{[1-N]^{\frac{1}{m-1}}}$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \leq Ae^{-\gamma(t-t_0)}\|x(t_0)\|, (x(t_0) = y(t_0))$$

that is the exponential stability of the solution $x = 0$ of (12), and the proof of the theorem is finished.

References

[1] B. P. Demidovitch, Lecture on the mathematical theory of stability (in Russian), Science, Moscow, 1967.

[2] Yu. S. Bogdanov, Application of generalized exponent numbers to study the stability of equilibrium point (in Russian), *DAN SSSR*, (1964), T158, №1, 9–12.

[3] Yu. S. Bogdanov, Generalized exponent numbers of non autonomous systems (in Russian), *Differential equations*, September, (1965), T1, №9.

[4] Yu. S. Bogdanov, On the reveal of asymptotically stability by means of little vd-numbers (in Russian), *Differential equations*, March, (1966), T2, №3.

[5] Yu. S. Bogdanov, Approximate generalized exponent numbers of differential systems (in Russian), *Differential equations*, June, (1966), T2, №7.

[6] Yu. S. Bogdanov and M. P. Bogdanova, Nonlinear analogue of Lyapunov transformation (in Russian), *Differential equations*, May, (1967), T3, №5.

[7] Ju. L. Daletski and M. G. Krein, Stability of solutions of differential equations in Banach space (in Russian), Science, Moscow, 1967.

[8] J. Bihari, A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations, *Acta Math. Acad. Scient. Hung.* VII, I, (1956), 81–94.

Tran Thi Loan
Khoa Toan
Truong Dai Hoc Su Pham Hanoi I
Hanoi, Vietnam

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 99–103*

A 2^n-EDRENDŰ FIXPONTOKRÓL

Bálint Szepessy (EKTF, Hungary)

Abstract: (On the fix point of order 2^n)

Let $f(x)$ be a continuous real valued function on the interval $[a, b]$ which maps the interval onto itself. If $c \in [a, b]$ and for the n^{th} iterated function of f we have $f_n(c) = c$, but $f_r(c) \neq c$ for $1 \leq r < n$, then we say that c is a fix point of f of order n. In the paper we prove the following result. Suppose that $a < d < b$, $f(a) = a$, $f(d) = b$, $x < f(x) < b$ for $a < x < d$, $f(x)$ is monotonicaly increasing in the interval $[f(b), d]$ and $f(x)$ is monotonicaly decreasing in $[d, b]$. Furthermore we suppose that n is the smallest natural number for which $f_{2^n}(b) \geq d_{-(2^n-1)}$, where d_{-k} denotes k^{th} inverse iteration of d. Then there exists a fix point of order 2^n in the interval $[a, b]$ and if there is another fix point, then its order is at most 2^{n+1}.

Bevezetés

Legyen $f(x)$ iterációs alapfüggvény az $[a, b]$ $(a < b)$ zárt intervallumon, azaz olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. $f(x)$ az adott intervallum minden belső pontjában folytonos, a kezdő-, illetve a végpontban jobbról, illetve balról folytonos;
2. $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. Nincs olyan részintervalluma az adott intervallumnak, amelyben $f(x) =$ konstans teljesül.

Az $f_0(x) = x, f_1(x) = f(x),\quad f_2(x) = f(f(x)), \dots, f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \dots$ függvényeket az $f(x)$ függvény nulladik, első, második, …, n-edik, … iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Ezek a függvények is mind rendelkeznek az 1., 2., 3. tulajdonságokkal.

Ha $f(c) = c$ teljesül, akkor a c pont az $f(x)$ függvény elsőrendű fixpontja. Ha $f_n(c) \neq c$, $n = 1, 2, \dots, n-1$ esetén, de $f_n(c) = c$, akkor a c pont az $f(x)$ függvény n-edrendű fixpontja. Ekkor, amint az ismeretes, $f(c) = c_1, f(c_1) = c_2, \dots, f(c_{n-1}) = c_n$ iterált pontok egy n-edrendű ciklust alkotnak.

Iterációelméletből megjelenő dolgozatok az utóbbi időben a magasabb rendű fixpontok eloszlásával, a szinguláris, reguláris és irreguláris pontok és intervallumok vizsgálatával, ezenkívül bizonyos lokális tulajdonságok vizsgálatával és különböző alkalmazásokkal foglalkoznak. (Az x_0, $(x_0 \in [a, b])$ pont szinguláris, ha (x_n) végtelen iterációs pontsorozat csak véges számú páronként különböző pontból áll, reguláris, ha (x_n) iterációs pontsorozat páronként különböző pontokból áll, és a pontsorozatnak véges számú torlódási pontja van, végül x_0 irreguláris pont, ha az (x_n) pontsorozatnak végtelen sok torlódási pontja van.)

A [2] és a [3] azt a kérdést vizsgálta, hogy milyen iterációs alapfüggvény esetén vannak tetszőlegesen magas rendszámú fixpontok; a [4] azt taglalja, hogy milyen feltételek mellett alkothatnak intervallumot az első és a magasabb rendű taszító fixpontok. Ebben a dolgozatban azt az elméleti és gyakorlati vonatkozásban is felmerülő kérdést vizsgáljuk, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén adható a fixpontok rendszámára felső korlát.

A 2^n-edrendű fixpontokról

Tétel. *Ha $a < d < b$ és $f(x)$ olyan iterációs alapfüggvény az $[a, b]$ szakaszon, amelyre $f(a) = a$, $f(d) = b$, $a < x < d$ esetén $x < f(x) < b$, és $f(x)$ az $[f(b), d]$ intervallumon monoton növekvő, a $[d, b]$ intervallumon monoton csökkenő, valamint n az a legkisebb (természetes) szám amelyre $f_{2^n}(b) \geq d_{-(2^n-1)}$ teljesül akkor $f(x)$ függvények az $[a, b]$ intervallumban vannak 2^n-edrendű fixpontjai, és legfeljebb 2^{n+1}-edrendű fixpontjai lehetnek.*

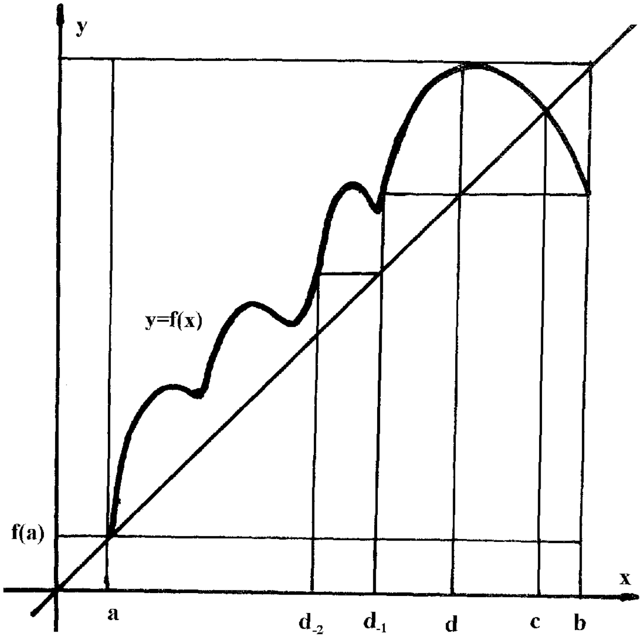
Megjegyzés. Amint az ismeretes $n \geq 1$ esetén $d_{-(2^n-1)} = \max\limits_{x\in[d,b]}(x)$, ahol $f_{2^{n-1}}(x) = d_{-(2^{n-1}-1)}$ azaz $d_{-(2^n-1)}$ a legnagyobb abszcisszaérték a $[d, b]$ intervallumban, amelyre $f_{2^{n-1}}(x)$ függvény $d_{-(2^{n-1}-1)}$ értékű.

Bizonyítás. n-re vonatkozó teljes indukcióval.
$n = 0$ esetén $f(x)$ az 1. ábrán látható alakú, ahol $f(b) = b_1 \geq d$.

Mivel $f(x)$ az $[a, d]$ intervallumon folytonos és minden $[a, b]$ intervallumbeli értéket felvesz ezért létezik ebben az intervallumban a d pontnak legalább egy inverz iterált pontja. Tekintsük a d pontot inverz iteráltjai közül — az $(a, d]$ intervallumban — azt, amelynek abszcisszája a legnagyobb, jelöljük ezt d_{-1}-gyel; $d_{-1} = \max\limits_{a<x<d}(x)$, $f(x) = d$. Ezután az előbbi eljárásnak megfelelően a $d_{-2} = \max\limits_{a<x<d_{-1}}(x), f(x) = d_{-1}, d_{-3}, \ldots, d_{-n}, \ldots$ inverz iterált pontokat.

A $(d_{-(i+1)}, d_{-i}]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ intervallumok egyszeresen és teljesen lefedik a $(a, d]$ intervallumot, így az $(a, d]$ intervallum bármely pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számú pontja marad ebben az intervallumban, és ez legfeljebb i, ha a kiindulási pont a $(d_{-(i+1)}, d_{-i}]$ intervallumban van. Lesz tehát olyan x_j $(j > i)$ iterált pont, amelyik a $(d, b]$ intervallumba esik. Ezt az intervallumot $f(x)$ önmagára vagy önmagába képezi le, így x_j minden iteráltja ebben az intervallumban marad, ezért magasabb rendű fixpontok csak ebben az intervallumban léphetnek fel.

Ismeretes, hogy ha egy intervallumot a benne monoton csökkenő iterációs alapfüggvény önmagára vagy önmagába képezi le, akkor ebben az intervallumban legfeljebb másodrendű fixpontok lehetnek ([3]).



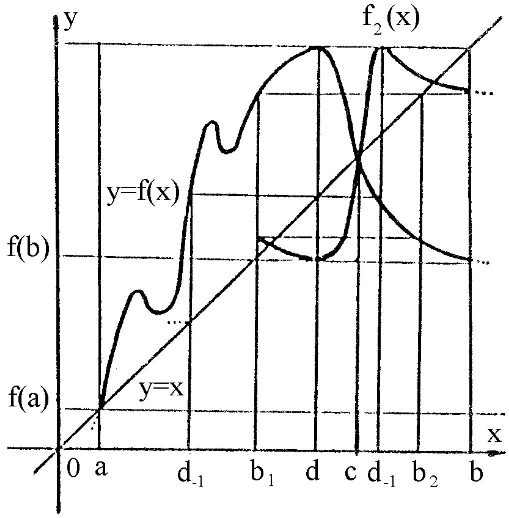
1. ábra

Tehát ($n = 0$ esetén) az $[a, b]$ intervallumban van elsőrendű (c) és nem lehet másodrendűnél magasabb rendszámú fixpont, azaz teljesül az állítás.

$n = 1$ esetén is az előzőekhez hasonlóan megmutatható, hogy magasabb rendű fixpontok csak az $[f(b) = b_1, b]$ intervallumban lehetnek (2. ábra).

Tekintsük $f_2(x)$-et iterációs alapfüggvénynek a $[b_1, b]$ intervallumon. Monoton növekvő (csökkenő) függvény monoton csökkenő (növekvő) függvénye (iteráltja) monoton csökkenő, valamint monoton csökkenő függvény monoton csökkenő függvénye monoton növekvő [3], ezért $f_2(x)$ a $[b_1, d]$ intervallumban monoton csökkenő, és $f_2(d) = b_1 < d$ miatt egy pontban metszi a $g(x) = x$ egyenest, a $[d, d_{-1}]$ intervallumban monoton növekvő, és $f_2(d_{-1}) = b$, így ebben az intervallumban lehetnek másodrendű fixpontok; a $[d_{-1}, b]$ intervallumban monoton csökkenő, tehát lesz egy másodrendű fixpont (2. ábra).

Ha a $[d, d_{-1}]$ intervallumban vannak másodrendű fixpontok, akkor legyen $e = \max\limits_{d<x<d_{-1}} (x)$, $f_2(x)$ és első iteráltja e_1. Az $[e_1, e]$ intervallumot a benne monoton növekedő $f_2(x)$ függvény önmagára képezi le, így $f_2(x)$-nek csak első, azaz $f(x)$-nek csak másodrendű fixpontjai lehetnek. Az $[e, b]$ intervallumban $f_2(x)$-nek ($n = 0$ eset alapján) lesznek elsőrendű, de legfeljebb másodrendű fixpontjai lehetnek, tehát $f(x)$-nek van másodrendű, de negyedrendűnél magasabb rendű fixpontjai nem lehetnek ebben az intervallumban.



2. ábra

A $[b_1, e_1]$ intervallumban sem lehet negyedrendűnél magasabb fixpont, mert ha $\widehat{c}$ ilyen, akkor $\widehat{c}_1$ iterált pont $\widehat{c}_1 \in [e, b]$ is ilyen lenne ($\widehat{c}, \widehat{c}_1$ ugyanabban a ciklusban van), ami az előzőek szerint lehetetlen.

Ha a $(d, d_{-1}]$ intervallumban nincsenek másodrendű fixpontok, akkor a $[c, b]$ illetve a $[b_1, c]$ intervallumban (c elsőrendű fixpont) az előzőekhez hasonlóan látható be, hogy vannak másodrendű, de nincsenek negyedrendűnél magasabb rendű fixpontok.

Tegyük fel, hogy $n - 1$ ($n \geq 1$) esetén igaz az állítás (indukciós feltevés). Megmutatjuk, hogy n esetén is teljesül.

Mint az előzőekben most is megmutatható, hogy magasabb rendű fixpontok csak a $[b_1, b]$ intervallumban lehetnek. Ebben az intervallumban ($n = 1$ esethez hasonlóan képezett) $f_2(x)$ iterációs alapfüggvénynek az indukciós feltevés értelmében vannak 2^{n-2}-edrendű fixpontjai, de legfeljebb 2^{n-1}-edrendű fixpontjai lehetnek, ami azt jelenti, hogy $f(x)$ iterációs alapfüggvénynek a szóban forgó intervallumban van 2^n-edrendű fixpontja, azonban 2^{n+1}-edrendűnél magasabb rendű fixpontjai nincsenek. Indirekt úton ($n = 1$ esethez hasonlóan) könnyen belátható, hogy a $[b_1, c]$ intervallumban sem lehetnek $f(x)$ iterációs alapfüggvénynek 2^{n+1}-edrendűnél magasabbrendű fixpontjai.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Adott n természetes számhoz konstruálható tehát olyan iterációs alapfüggvény, amelyre vannak 2^n-edrendű fixpontok, de 2^{n+1}-edrendűnél magasabb rendű fixpontok nincsenek.

Irodalom

[1] Ralston, A., A first course in numerical analysis, *McGraw-Hill. Inc.*, New York, 1970.

[2] Tien-Yien Li and L. James, A. Yorke, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, **(10)** 82 1975, 985–992.

[3] Szepessy B.: A magasabb rendű fixpontokról. *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio mathematicae*, **XII.** 1994, 9—15.

[4] Szepessy B.: A taszító fixpontokról. *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio mathematicae*, **XXIII.** 1996, 54—59.

Bálint Szepessy
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers' Training College
Leányka str. 4–6.
H-3300 Eger, Hungary

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 107–114*

Matematikafeladatok érdekessége, nehézsége a tanulók szemszögéből

Orosz Gyuláné (EKTF, Hungary)

Abstract: This paper deals with pupils' conceptions about interest and difficulty of the mathematical problems. It consists of the choosing of this topic, the framework of the study, research methods and equipments, some results and summary of it.

Jelen tanulmányunkban egyéni PhD hallgatóként végzett kutatómunkánk néhány eredményéről számolunk be. Vizsgálatunk a matematikai képességstruktúrák, motivációs helyzetek és a köztük lévő összefüggések elemzésére irányul, amely a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Alkalmazott pszihológiai alprogramhoz kapcsolódik.

1. A téma választásáról

A matematikaoktatásban az új tanterv bevezetését követően is központi szerepet játszik a problémamegoldó gondolkodás fejlesztése. A gondolkodásfejlesztő módszertani szabályok közül igen lényeges az önálló feladatmegoldás gyakorlása, a matematikai feladatmegoldó képesség fejlesztése. A gondolkodás gyakorlásában rendkívül fontos szerepe van a motivációnak. Nem csak megerősítő szerepét kell figyelembe venni, hanem indító és menet közbeni fenntartó hatását is. Ezért is fontos a matematikaoktatás minden szintjén a feladatok kiválasztásának pszichológiai szempontjait szem előtt tartani. A matematikaversenyek, tanítási órák, felvételi vizsgák feladatsorainak összeállításakor lényegesnek tartjuk a feladatok megfelelő nehézségét és kellő érdekességét.

Tanítási tapasztalataink és az óralátogatások, tanulói munkák elemzése arról győzött meg bennünket, hogy a 10-14 éves tanulóknál igen fontos szerepe van e két tényezőnek egy kedvező motivációs bázis megteremtéséhez.

E gondolatok inspiráltak bennünket, hogy a tanulók véleménye alapján elemezzük a matematikafeladatok érdekességét és nehézségét.

2. A vizsgálat hátteréről

A MAVI (Mathematical Views) kutatócsoport Günter Törner (Németország, Duisburg) és Erkki Pehkonen (Finnország, Helsinki) kutatók vezetésével olyan vizsgálatokat folytat, amelyek kitérnek arra, hogy a tanárok és diákok hogyan vélekednek a matematikáról és a matematika oktatásáról. Célirányos vizsgálataik azt mutatják, hogy a matematika tanulásának sikerességére jelentős hatással van az, hogy a tanulók hogyan vélekednek e kérdésről. Schoenefeld (1985) rámutatott, hogy a matematika hatékony elsajátításának gátja lehet az a „hiedelemrendszer", amely a gyerekekben él a matematikáról és annak oktatásáról. Borasi (1990) azt hangsúlyozta, hogy azok a tanulók, akiknek szigorú és negatív irányú véleményük van a matematikaoktatásról, könnyen passzívvá válnak, és a megértésnél erősebben hangsúlyozzák a memória szerepét a matematika tanulásában. Erkki Pehkonen és Tompa Klára (1994) Magyarország és Finnország matematikaoktatását hasonlították össze a tanulók véleménye alapján. Vizsgálatukhoz Bernd Zimmermann, a német matematikaoktatás egyik kutatója által összeállított kérdőívet használtak, amelyet egy német—finn közös vizsgálathoz fejlesztettek ki (Pehkonen—Zimmermann, 1990). Eredményeik azt mutatják, hogy a tanulók véleményei hűen tükrözik az adott ország matematika oktatásának jellemzőit.

A Helsinki Egyetem Tanárképző Karán számos válaszra váró kutatási kérdés fogalmazódott meg e területhez kapcsolódva: Vajon hogyan vélekednek ma a gyerekek a matematikáról, a matematika tanításáról? Mit és hogyan kérdezzünk, hogy hiteles, pontos képet kapjunk? Milyen összefüggésben vannak a tanulói teljesítmények a tanulók nézeteivel? E kérdések keltették fel érdeklődésünket a kutatócsoport munkája iránt, s jeleztük bekapcsolódási szándékunkat Erkki Pehkonen professzornak, aki rendelkezésünkre bocsátott néhány szakirodalmat és bibliográfiát amelyek segítettek a vizsgálati eszközünk kiválasztásában.

3. A vizsgálat körülményei, résztvevői

Vizsgálatunkat az 1998—1999-es tanévben Mezőcsáton és Tiszaújvárosban megrendezésre kerülő matematika versenyen végeztük, amelybe összesen 784 tanulót vontunk be, akik Sajószöged, Ároktő, Encs, Emőd, Tiszakeszi, Hejőcsaba, Gelej, Mezőcsát, Tiszaújváros 5—8. osztályos tanulói.

A tanulók évfolyamok és nemek szerinti eloszlási táblázata

Osztályok	Fiú	Lány	Összesen
5. oszt.	101	87	188
6. oszt.	106	74	180
7. oszt.	102	84	186
8. oszt.	69	50	119
Összesen	376	297	673

4. A vizsgálat eszköze, célja, feladatok

Vizsgálatunkhoz nem a német—finn vizsgálathoz kifejlesztett kérdőívet használtuk, hanem a tanulók véleményét tisztán matematikafeladatokon keresztül próbáltuk feltárni az érdekesség és nehézség vonatkozásában. A matematikaverseny keretében, miután a tanulók befejezték a feladatok megoldását arra kértük őket, hogy egy ötfokozatú skálán pontozzák a feladatokat az alábbiak szerint:

igen érdekes (5 pont),

érdekes (4 pont),

közepes érdekességű (3 pont),

kissé érdekes (2 pont),

nem érdekes (1 pont).

A nehézség vonatkozásában hasonlóan kértük a tanulók véleményét:

igen nehéz (5 pont),

nehéz (4 pont),

közepes nehézségű (3 pont),

kissé nehéz (2 pont),

könnyű (1 pont).

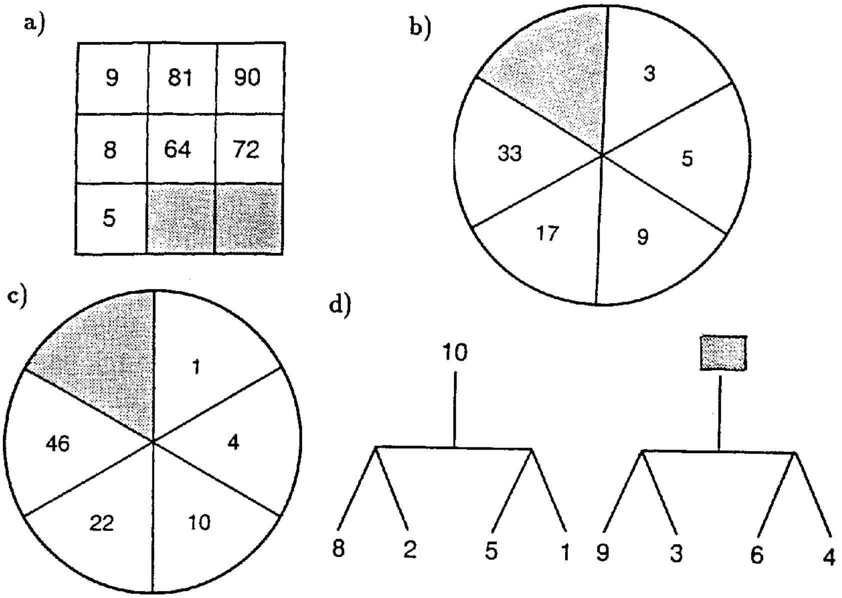
A feladatok kiválasztásának két -általunk fontosnak tartott- pszihológiai szempontjáról kettős céllal kértük a tanulók véleményét. Ezért a matematikai érdeklődésterminus feltérképezését és a feladatok nehézségének tanulói megítélését helyeztük vizsgálatunk középpontjába. E hét aspektust azért tartjuk fontosnak, mert tisztázatlan még, hogy a korosztályt mely matematikai tartalmak, milyen típusú problémák érdeklik leginkább. A feladatok nehézségének megítélése pedig az elért teljesítményben jelentős.

Nézőpontunk szerint a tanulók feladat iránti attitűdjét, a nehézségi szintről kialakított véleményét célszerű figyelembe venni a feladatok konstruálásakor.

5. OSZTÁLYOS FELADATOK

1. A hangya olyan erős, hogy a saját tömegénél 50-szer nehezebb tárgyat képes felemelni. Tegyük fel, hogy egy tanuló 3-szor olyan erős, mint a hangya. Hány lovat képes felemelni (hány „lóerős"?), ha a tanuló tömege 36 kg, a ló tömege 450 kg?

2. Fogalmazz meg szabályt és pótold a hiányzó számokat az ábrák alapján!



3. Egy kis elefánt és egy nagy egér futásban versenyeznek egy 2400 m hosszú pályán. Mindketten egyszerre indulnak a START vonaltól. A kis elefánt 10 perc múlva a pálya $\frac{2}{5}$ részéig, a nagy egér a $\frac{3}{8}$ részénél 100 m-rel távolabb jutott. Melyikük jutott messzebbre? Mennyi volt a távolság közöttük 20 perc múlva?

4. Egy téglatest térfogata 18 dm^3. Minden élének hossza egész szám. Keresd meg az összes ilyen téglatestet! Határozd meg az élek hosszát! Számítsd ki a téglatestek felszínét!

5. Az 5. osztályos feladatok elemzése az érdekesség, nehézség szerint

1. feladat:

Ezt a verbálisan kifejezett aritmetikai problémát alkalmasnak tartjuk arra, hogy a motiváció erősítésének funkcióját is betöltse. Feltételezzük, hogy a tanulók is érdekesnek vélik a szövegezését; mert szokatlan , meglepő adatokat tartalmaz, érdeklődést felkeltő a megfogalmazása, a tanulókhoz közel álló problémákkal foglalkozik.

A feladatot az átlagosnál nehezebbnek véljük. A gondolkodási műveletek szempontjából rutineljárást igénylő szöveges típusú, mert a szövegértés alapján egyszerű műveletek felismerése és elvégzése a tanulók teendője, ami ebben az életkorban (11-12 év) elvárható. Nehézség jelentkezhet a megoldáskor a probléma megértésében, mert a tanulók többségénél azt tapasztaljuk, hogy járatlanok a feladatok elemzésében.

2. feladat:

Úgy gondoljuk, hogy ez a feladat is felkelti a tanulók érdeklődését, mert nem szokványos, hogy a „bűvös” alakzatokba kell beírni a hiányzó számokat a megfogalmazott szabály alapján.

A feladatot az átlagosnál könnyebbnek véljük. A megoldáshoz az induktív gondolkodási képesség szükséges, amely a matematikai problémák megoldásában igen fontos. Nehézséget okozhat a szabályok verbális megfogalmazása.

3. feladat:

Ezt a problémát azért tartjuk érdekesnek, mert figyelmet lekötő a tartalma, újszerű a megfogalmazása, a megoldás szokatlan eredményre vezet, például: a nagy egér messzebbre jut, mint a kis elefánt.

Nehézséget jelent a feladat összetett szövegezése. Több különböző ismeret együttes felidézését és különböző műveletek elvégzését, matematikai modell felismerését és alkalmazását igényli a megoldás. Az 5. osztályos tanulók többsége mindezekre még nem képes. Ennél a feladatnál alacsony teljesítettségi nívóra számítunk. Azt feltételezzük, hogy azok a tanulók oldják meg a problémát akik matematikából igen jó képességűek.

4. feladat:

Úgy véljük, hogy ez a feladat felkelti a tanulók érdeklődését, mert nem szokványos geometriai számításhoz kapcsolódik. Adott térfogatú téglatest éleit kell meghatározni majd kiszámítani a téglatest felszínét. A tanulók számára úgy tűnhet, hogy a megadott egyetlen adatból ez nem lehetséges.

Nehéznek tartjuk a problémát mind a matematikai tartalom, mind a gondolkodási műveletek szempontjából. Az aritmetika, számelmélet, algebra és geometria témakörök fogalmainak, szabályainak együttes felidézése, alkalmazása, összetett gondolkodási művelet elvégzése szükséges a megoldáshoz.

6. Néhány eredmény és azok elemzése

A továbbiakban az 5. osztályos adatokat elemezzük azok statisztikai feldolgozása alapján.

Érdekességi mutatók

Érdekesség	Összes	Átlag	Szórás
1. feladat	752	4,000	0,953
2. feladat	762	4,053	1,122
3. feladat	704	3,744	1,249
4. feladat	639	3,398	1,461

Maximális pontszám: 940 $N = 188$

1. táblázat

Az 1. táblázat azt mutatja, hogy a tanulók minden feladat érdekességére igen magas pontszámot adtak. Ez igazolja a feladatok érdekességének elemzésekor megfogalmazott feltételezésünket. A tanulók minden feladatot érdekesebbnek vélnek az átlagosnál. A táblázatból megállapítjuk a feladatok érdekességi sorrendjét. A legérdekesebbnek a 2. feladatot tartják, majd igen kis eltéréssel az 1. feladatot, amit a 3. feladat követ, s legkevésbé érdekes számukra a 4. feladat. Válaszaikból következtethetünk a matematikai érdeklődésterminusra. Megállapíthatjuk, hogy mely matematikai tartalmak érdeklik őket leginkább, s melyek kevésbé.

A tanulók fokozottan érdeklődnek az aritmetika, algebra, sorozatok témakörök feladatai iránt. Kevésbé érdekli őket a geometriai számításokkal kapcsolatos probléma. Az okok hátterében az állhat, hogy a tanterv kevesebb hangsúlyt helyez erre a tartalomra 5. osztályban.

A tanulók válaszai hierarchikus képet mutatnak. Minden feladatnál előfordulnak egymásnak ellentmondó tanulói vélemények is. Mindezek feltételezhető oka a tanulók életkori sajátosságaiban fellelhető. A fejlődéslélektan szerint a tanulók ebben az életkorban még nem rendelkeznek kellő kritikai érzékkel, nem képesek önállóan véleményt formálni.

Összeségében megállapíthatjuk, hogy a tanulók nézetei tükrözik a szakzsűri véleményét a feladatok érdekességéről.

Nehézségi mutatók

Nehézség	Összes	Átlag	Szórás
1. feladat	508	2,702	1,299
2. feladat	538	2,862	1,388
3. feladat	656	3,489	1,322
4. feladat	704	3,744	4,000

Maximális pontszám: 940 $N = 188$

2. táblázat

A 2. táblázatban lévő pontszámokból megállapíthatjuk, hogy az 1. és 2. feladatot az átlagosnál könnyebbnek, a 3. és 4. feladatot pedig nehezebbnek vélik.

A feladatsort a tanulók fokozatosan nehezedőnek tartják. Véleményük szerint az 1. feladat a legkönnyebb, a 2. feladat valamivel nehezebb. A nehézségi pontszámok mutatói differenciáltabban jelzik a tanulók nézeteit, mint az érdekesség esetében. A 4. feladatot sokkal nehezebbnek vélik, mint az elsőt, amit a pontszámok jelentős különbsége igazol. A matematikai tartalom szempontjából a tanulók könnyűnek érzékelik a rutin szöveges (1.) és a sorozatok (2.) témakörbe tartozó feladatokat és nehéznek tartják a problémamegoldó gondolkodás-típúsú összetett szöveges aritmetika (3.) és geometriai számításos (4.) feladatokat.

A feladatok nehézségét a tanulók jól ítélik meg, amelyben tükröződnek a gondolkodási műveletek, műveletegyüttesek életkori szintjei.

A tanulók feladatokban elért pontszámai, teljesítmény

Pontszámok	Elérhető	Elért	Teljesítmény (%)
1. feladat	1504	537	35,50
2. feladat	1880	908	48,29
3. feladat	2256	704	31,21
4. feladat	2632	505	19,18

N=188

3. táblázat

A feladatokban elért pontszámok alapján meghatározhatjuk a tanulók teljesítményét. Összeségében megállapíthatjuk, hogy a teljesítettségi nívó mind a négy feladatban alacsony, mert nem éri el az 50%-ot. A tanulók a 2. feladatban érték el a legjobb teljesítményt ami $48,29\%$ majd az első feladat következik, amelyben $35,5\%$, a 3. feladatban $31,21\%$ s végül a 4.-ben $19,18\%$ a teljesítmény. A fentiek azt jelentik, hogy a pontszámok összhangban vannak a feladatok nehézségi szintjével.

Korrelációértékek a feladatok pontszámai és nehézsége között

F1P – F1N	$-0{,}191^{**}$	$p < 0{,}01$
F2P – F2N	$-0{,}047$	nem szignifikáns
F3P – F3N	$-0{,}060$	nem szignifikáns
F4P – F4N	$-0{,}192^{**}$	$p < 0{,}01$

A feladatok pontszáma és nehézsége közötti negatív korrelációs értékek azt jelentik, hogy a tanulók az általuk nehezebbnek vélt feladatokban valóban alacsonyabb pontszámot értek el.

Az 1. és 4. feladat esetén szignifikáns negatív az összefüggés, míg a 2. és 4.-nél negatív, de nem szignifikáns a kapcsolat. Az általuk vizsgált 4. feladat esetében a kapott eredmények azt mutatják, hogy érdemes a tanulók véleményét figyelembe venni, mert azok ismeretében jó becslést adhatunk a várható teljesítményre.

A feladatsorok tervezésekor igen lényeges pszihológiai és szakdidaktikai szempont, hogy legyen könnyebb, közepes és az átlagosnál nehezebb feladat, a nehézségi nívó feleljen meg a tanulók tudásszintjének, életkori jellemzőinek, amelyekre az elemzéskor már utaltunk.

Korrelációértékek a feladatok pontszámai és érdekessége között

F1P – F1E	$0{,}204^{**}$	$p < 0{,}01$
F2P – F2E	$0{,}234^{**}$	$p < 0{,}01$
F3P – F3E	$0{,}255^{**}$	$p < 0{,}01$
F4P – F4E	$0{,}046$	nem szignifikáns

A pontszámok és érdekesség közötti pozitív korrelációs értékek azt mutatják, hogy minél érdekesebb a feladat a tanulók számára, annál magasabb pontszámot, jobb teljesítményt érnek el, ami várható is.

Az 1., 2., és 3, feladatok esetében szignifikáns az összefüggés. Ez a kapcsolat azzal magyarázható, hogy az 5. osztályos tanulók a számukra érdekesebbnek tartott problémákat nagyobb ertőfeszítéssel, több időráfordítással próbálják megoldani, s így magasabb pontszámot, jobb teljesítményt érnek el.

A tanulók véleménye jó támpontot adhat a szaktanárnak a számukra érdekes feladatok kiválasztásában, amely a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében igen fontos motiváló tényező.

Összefoglalva az eredményeket megállapíthatjuk, hogy érdemes a tanulók nézeteit az érdekesség és nehézség vonatkozásában alapul venni a feladatlapok, feladatsorok tervezésekor.

Irodalom

[1] Balogh L.: Feladatrendszerek és gondolkodásfejlesztés. Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[2] Balogh L.—Herskovits M.—Tóth L.: Tehetség és képességek. KLTE Pedagógiai—Pszihológiai Tanszék, Debrecen, 1995.

[3] Bábosik, I.—M. Nádasi, M.: A pedagógiai kutatás módszerei II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[4] Borasi, R.: The Invisible Hand Operating Mathematics Instruction: Students Conceptions and Expectations, Teaching and Learning Mathematics in the 1990s. Yearbook 1990, Ed.: T. J. Cooney, 174–182.

[5] Kelemen L.: A 10—14 éves tanulók tudásszintje és gondolkodása. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1963.

[6] Schoenfeld, A. H.: Mathematical Problem Solving. Orlando (F.), Academic Press, 1985.

[7] Pehkonen, E.—Zimmermann, B.: Probleemakentat matematiikan opetuksessa. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 86 (in Finnish), 1990.

[8] Pehkonen, E.—Tompa, K.: Matematikaoktatás a tanulók szemével Magyarországon és Finnországban. *Szemle*, 1994, 39—46.

[9] Salamon J.: A megismerő tevékenység fejlődéslélektana. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.

Orosz Gyuláné
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers' Training College
Leányka str. 4–6.
H-3300 Eger, Hungary

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 115–120*

A MATEMATIKAI ANALÍZIS OKTATÁSA SORÁN TAPASZTALT PROBLÉMÁKRÓL ÉS HIBÁKRÓL I.

Mihály Rados (EKTF, Hungary)

Abstract: Problems and mistakes of the teaching of mathematical analysis I. We deal with the axiomatic structure, the system of symbols and the connection of descriptiveness and analysis.

Bevezetés

A diák nem akar tanulni, de ismerni, érteni és tudni szeretne mindent. Ez az a helyzet, amely alapvető nehézséget és értelmét adja az itt dolgozó szakemberek munkájának, szakképzettségükből és hivatástudatukból eredő tevékenységüknek. Napjainkban a matematikaoktatás minden szintjén sok olyan változás következett be, amelyek szükségessé teszik szaktárgyi és metodikai kérdések átgondolását újra:

— a matematika oktatásának tartalma megközelíti a matematikai tudományt;
— a NAT (Nemzeti Alaptanterv) feltűnése, csiszolgatása, eltűnése, újrafogalmazása;
— a felsőfokú oktatási intézmények fúziója;
— az új eszközrendszer nemzetközi méretű bevezetése és elterjedése (számítógépek!), ezek kapcsolata a hagyományos oktatási eljárásokkal;
— a középiskolai és felsőoktatási intézmények autonómiájának növekedése;
— az úgynevezett átjárhatóság (sőt áthallgatás) biztosítása;
— a kreditpontrendszer alkalmazása;
— az önköltséges, az önálló tanulásra alapuló intézmények rohamos terjedése;
— a tankönyvek, jegyzetek, ajánlott irodalom változatossága;
— és lehetne folytatni a problémák sorát tovább.

Ezek a módosulások — sokszor nevezik korszerűsítésnek, fejlődésnek — részben szükségszerűek, hiszen az iskola élete mindig a társadalmi lét kicsinyített, késleltetett, de mindig direkt leképezése volt. A változás jellemzésére példaként megemlítjük a logarlécet: ez az eszköz nem is olyan régen a mérnök, a matematikus szimbóluma volt, a főiskolákon külön tantárgyként tanítottuk használatát különböző feladatok megoldására; a mai diákok már látásból sem ismerik a logarlécet; ott van a zsebszámológépe!?

Ugyanakkor jelentkeztek a főiskolára felvételt nyert matematika szakos hallgatóknál olyan problémák, amelyekre már részben céloztunk:

— egyes fogalmak, sőt fejezetek ismerete felszínes;

— a követelményekben nagy az ugrás számukra a középiskolához képest;
— nem biztosak a matematika szaknyelvének használatában, mondandójuk verbális kifejezésében (a tesztek utóhatása?);
— tájékozatlanok a következtetések, bizonyítások terén, nem értik ezek logikai struktúráját;
— ismereteik alkalmazása formális, mechanikus;
— hiányzik belőlük a nehézségek leküzdésére irányuló törekvés, a kitartó igyekezet; ha nem érnek el azonnal sikert a feladatok megoldásában, könnyen feladják a reményt.

Az alábbiakban önkényesen kiragadunk néhány problémát és feladatmegoldási nehézséget a matematikai analízis témaköréből, amelyek igazolják az említett, vázolt kérdések realitását!

1. Az axiomatikus (axiomatikushoz közelálló) tárgyalásmódról

Ez a legelső, „alapozó”, a hallgatótól számára eddig még meg nem szokott nagy figyelmet, koncentrációt és distinctiót követelő témakör. Kezdetben nem igazodik el az axiómák, a definíciók, tételek, bizonyítások világában. Nem érti, hogy „miért” kell nyilvánvaló dolgokat nyakatekert módon bizonygatni?! Ez minden egyéb fogalom kialakításánál így alakul: ha kimondunk egy definíciót, ezzel még nem tanítottuk meg! Egyre világosabbá majd az alkalmazások, más fogalmakkal való kapcsolatának megteremtése, funkciójának megismerése során válik egyre tisztábbá! A repülőgépről van fogalma a kisgyereknek, az utasnak, a pilótának, a repülőgéptervező mérnöknek, de például ezen fogalmak közötti különbséget nem is érdemes hangsúlyozni.

Oktatásunknak is vannak hiányosságai ezen a téren. Egy-egy fogalom még a különböző matematikai tantárgyakban is definiálásra kerül, más-más megfogalmazásban: például szerepel a függvény, a számosság fogalma az algebrában, a folytonosság a geometriában is. Másrészt ha a hallgató kezébe veszi egy másik egyetem (főiskola, tanfolyam) tankönyvét, jegyzetét, vagy egyéb analízis tárgyú szakkönyvet, ugyancsak el kell mélyednie az adott tananyag ott alkalmazott felépítésében. A főiskolai hallgató emlékszik középiskolai tanulmányaira is, ennek szemléletes tárgyalásmódja kezdetben segítheti az átmenetet, de később zavarja az absztrakt ismeretszerzés folyamatát. Probléma jelentkezik a társtanszékekkel való kapcsolatban a tantárgyi koncentráció terén is. Például a fizikában jóval előbb szükség van olyan fogalmakra — differenciálhányados, integrál, ... —, amelyek a rendszeresen felépített matematikai analízis későbbi fejezetei.

Itt bizony zavar keletkezik! Ha a többi szakterület nem törekszik az axiomatikus felépítésre, akkor az analízis axiomatikus tárgyalása helyett axiomatizmust tanítunk analízis címszó alatt.

Ugyanekkor a tananyag rendszeres felépítésére, a precízségre, a szabatosságra, most lenne a legnagyobb szükség, amit a szabatosság paradoxona címen is szokás nevezni.

Aki még nem látja a különbözőséget, annak a szabatosság semmit sem mond. Aki már jól látja, az viszont az elnagyolt fogalmazás ellenére is látja. Akik értik egymást, azok pontatlanul is kifejezhetik magukat. A szabatos megkülönböztetésre azoknak van leginkább szükségük, akik éppen kezdik látni a különbséget, de még nem biztosak benne ([3] 52. o.).

2. A jelölésrendszer

Az analízis tananyagának felépítésében mutatkozó eltérések mellett növeli az oktatás nehézségét még az is, hogy a szakirodalom szimbolikája nem egységes. Ahány intézmény, ahány tanszék, sőt ahány szerző, annyiféle jelölésrendszert alkalmaz, sokszor párhuzamosan és részben ellentétesen. Gazdagítja ezt a választékot az önköltséges képzési formák, az önálló tanulási módszerek segítségére ki-kialakított jelölésrendszer, valamint az egyes tanárok szubjektív elképzelései.

Mi a továbiakban következetesen [1] és [2] jelöléseit, felépítését és feladatmegoldásait használjuk.

Valós számsorozatok esetében külön ki kell térni arra, hogy mi a különbség az

$$\langle a_n \rangle; \quad a_n; \quad \{a_n\}$$

jelentése között. Elegáns taglalása ennek a témakörnek a [8] 141. oldalán kezdődő fejezet.

Ha a függvény fogalmát előzetesen definiáltuk, a valós számsorozat fogalmát úgy értelmezhetjük, mint a természetes számok ($\mathbf{N}$) halmazán értelmezett függvényt (f):

$$\langle a_n \rangle \colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}; \qquad a_n := f(n), \quad n \in \mathbf{N}$$

Függvények esetében a hallgatók gyakran keverik a következő szimbólumokat:

$$f$$

$$f(x)$$

$$x \longmapsto f(x)$$

$$x \longmapsto f(x),\ x \in D_f$$

$$x \xrightarrow{\mathrm{f}} y$$

$$y = f(x)$$

például

$$f \colon H \to \mathbf{R},\ f(x) := x^2$$

Nem mindig világos előttük, hogy melyik jelölés melyik másikkal ekvivalens, illetve mi a különbözőség! A matematikai analízisben a hozzárendelési szabály nem ad meg függvényt, ha nem határozzuk meg az értelmezési tartományt, hiszen a függvény két halmaz közötti binér reláció speciális esete. Annyi „lezserséget” megengedünk, hogy csak a képelemek halmazát nevezzük meg (valós értékű), mert a pontos értékkészlet általánosabb esetben a függvénydiszkusszió során állapítható meg. A társtudományok legtöbbször megelégszenek a hozzárendelési szabály megadásával, de ekkor külön munka az értelmezési tartomány, mint a valós számok szóba jöhető legbővebb részhalmazának (vagy ennek még egy részhalmazára való leszűkítésének) megállapítása.

3. Az analízis és a természettudományok (valóság, szemléletesség) kapcsolatáról

Ez a kérdés folyamatosan napirenden van, átfogó elemzések tárgya, amelyre nem célunk kitérni. Néhány oktatásban is fontos példát említünk csak.

3.1. Mit nevez egy kezdő diák folytonos vonalnak? „Ha megtudom rajzolni a táblára krétával a kréta felemelése nélkül". Ez a megfogalmazás több szempontból sem fogadható el! Definiálni kellene mit jelent az, hogy „a kréta felemelése nélkül"; matematikai fogalmat egy fizikailag végrehajtott tevékenységgel próbálunk meghatározni; mi a kapcsolat a „folytonos" vonalnak és az ezt leíró függvény folytonosságának,...

Már első szinten is elgondolkodtatják a diákokat a következő kételkedést kifejező problémák: messziről „folytonos"-nak tűnik a táblára rajzolt vonal, de ha közel megyek, már különálló krétaszemcséket látok; mi lenne, ha mikroszkóppal nézném; egymástól távoli mészkődarabok tűnnek fel; ... hol van itt folytonosság?

Az analízis másik irányból általánosabban definiálja ezt a fogalmat. Síkbeli folytonos vonalnak mondjuk az

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

$$\alpha \le t \le \beta; \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

koordinátájú pontok halmazát, valahányszor f és g az $[\alpha, \beta]$-ban folytonos függvény ($t \in [\alpha, \beta]$ számok a paraméter szóba jövő értékei) ([6], 367. o.).

3.2. A felsőktatásban résztvevő matematika szakos hallgatók érdeklődését tovább lehet fokozni, erre példaként idézünk néhány feladatot.

3.2.1. A hallgatók megismerik, vizsgálják az „úgynevezett" egészrész-függvényt, majd elemzik ennek folytonosságát. Könnyen bebizonyítható, hogy ha $x_0 \notin \mathbf{Z}$, $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := [x]$ függvény folytonos, de ha $x_0 \in \mathbf{Z}$, akkor f az x_0-ban balról nem folytonos, jobbról viszont folytonos! „Hogy lehet ez? Hiszen a függvény grafikonján balról éppen úgy át tudok nézni, mint jobbról az $x_0 \in \mathbf{Z}$ esetekben is?!"

3.2.2. Elemezzük az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \ne 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt folytonosság szempontjából! Könnyű belátni, bebizonyítani, hogy ez a páros függvény minden valós x esetén folytonos, problémát csak az $x_0 = 0$ hely esete jelent. A függvény grafikonját az $x_0 = 0$ környezetében nem lehet megrajzolni!

Az $x_0 = 0$ felé haladva a görbe végtelen sokszor metszi az x tengelyt. „Elvben bármilyen közel vezethetjük a grafikont az $x_0 = 0$-hoz, de az $x_0 = 0$-án nem vagyunk képesek átvezetni.” ([4] 242. o.) Az f függvény pedig folytonos az $x_0 = 0$-ban is! Ennek ellenére nincs értelme az olyan kérdésfelvetésnek, hogy például a görbe jobbról haladva a 0-hoz felülről vagy alulról megy-e be az origóba!

A folytonosság matematikai értelmezésében benne vannak implicite olyan összefüggések, tulajdonságok is, amelyek a szemlélet számára nem nyilvánvalóak, szinte hozzáférhetetlenek. Ez a függvény egyébként nem erőltetett példa, mert bizonyos csillapodó rezgések leírására ehhez hasonló függvények alkalmasak ([4]).

3.2.3. Az érdeklődő hallgatók ilyen példák megismerése után nagyobb figyelemmel kísérik a fogalom általánosítását: kompakt halmazon folytonos függvény kompakt halmazon pontonként és egyenletesen folytonos függvény (és a tulajdonságok) felülről folytonos függvény, teljesen folytonos függvény; ...

4. A végtelen fogalmáról a matematikában

Véges értelmünkkel a végtelent felfogni nem könnyű feladat, a definíciókra való támaszkodás ismételten megkövetelt előfeltétel, mert különben „józan paraszti ésszel”, a „szemlélet alapján”, ...durva szakmai hibákat lehet elkövetni a „$\frac{\infty}{\infty}$”, „$\frac{0}{0}$”, „$\infty - \infty$”,... típusú kifejezések, ezek határértékének elemzése során. Egy sorozat vagy függvény határértékén mindig valamilyen valós számot értünk. „De akkor mit értsünk plusz (vagy minusz) végtelenen? Semmi esetre sem olyan „számot” ... ([5] 131. o.) Végtelen, „mint olyan” nem létezik, erről általában nem lehet beszélni, funkciója mindig a definícióban szerepel ([1], [2]).

A témakör elemzése is kimeríthetetlen, mint maga a fogalom. Kezdődik azzal, hogy mit is jelent: $n \to +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$; $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$; $\infty \in \mathbf{R}_b$; ...

A konvergens, divergens (valódi divergens) sorozatok és sorok tárgyalása hosszú folyamat. Általában bizonytalanok a hallgatók az elégséges, szükséges, ...feltételek megfogalmazásában, sok hibát követnek el. [7] például kiemeli: konvergens-e a következő valós számsor: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{(2k)!}$ (definíció szerint: $0^0 := 1,\ 0! := 1$)?

A D'Alembert-féle hányados-kritériumot alkalmazva sok hallgató eljut az $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2(n+1))!n^n}$ kifejezéshez, de ez számára bonyolultnak tűnik, és abbahagyja a megoldást. Pedig némi áttekintés után könnyű belátni, hogy ez a határérték 0, tehát a sor konvergens ([7] 127. o.)!

Most egy példát említünk csak. Tanári kérdés: „Mennyi végtelen sok pozitív valós szám összege?” A „természetes” válasz „végtelen”?! A fogalmak tisztázása, a szükséges és elégséges feltételek kimondása és bizonyítása után még mindig marad bizonytalanság a diákokban! Mennyi az összege a közismert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots$$

harmonikus sornak? Számítástechnikában jártas hallgatónk összeadott egymillió tagot: $s_{1\,000\,000} \approx 14{,}39$. Ebből arra következtettek, hogy a sor konvergens, összege 20 alatt marad. Jött a bizonyítás: ez a sor divergens,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Irodalom

[1] Rimán J.: Matematikai analízis I. EKTF Líceum Kiadó, Eger, 1998.

[2] Rimán J.: Matematikai analízis feladatgyüjtemény I—II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[3] Pálfy S.: Tanári kézikönyv a 6. osztályos számtan-mértan tanításához, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[4] Ruzsa I.: A matematika és a filozófia határán. Gondolat Kiadó, Budapest, 1966.

[5] Peller J.: Az analízis elemeinek tanítása a középiskolában. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

[6] Császár, Á., Valós analízis I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[7] Tupikov, V. A.: Osibki v resenii zádács po viszsej matematike, Viszsaja Skola, Minszk, 1976.

[8] Kósa, A.: Vírusok a matematikában. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.

Mihály Rados
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers' Training College
Leányka str. 4–6.
H-3300 Eger, Hungary

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **26** *(1999) 121–126*

EGY FELMÉRÉS TANULSÁGAI

Sashalminé Kelemen Éva (EKTF, Hungary)

Abstract: In this paper we are analyzing a proficiency test written by mathematics major college students. It is obvious by the test that the clarification of the rudiments of logic are needed.

Néhány megjegyzés az első évfolyamos matematika szakos tanárképző főiskolai hallgatók logikai ismereteiről

A főiskolai hallgatók többéves oktatása (geometria, logika, elemi matematika) során szerzett negatív tapasztalataim késztettek arra, hogy felméréseket készítsek az intézményünkbe bekerülő hallgatók logikai ismereteiről. Dr. Rédling Elemérnek a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskolán a logikai fogalmak témakörében végzett felmérését ([2]) olvasva, kiváncsi voltam arra, hogy a leendő matematikatanárok milyen alapokkal rendelkeznek.

Az első felmérést 1993-ban készítettem az akkori első évfolyam felével, 65 hallgatóval. Ekkor a logika oktatása az első év első félévében történt, így képet kapva arról, hogy melyek a főbb hiányosságok, tudtam, hogy mire kell koncentrálni az anyag tárgyalásakor. 1994-től a „Halmazelmélet és matematikai logika" előadásai a harmadik évre kerültek, s az alapvető logikai fogalmakat a hallgatók az első évfolyamon, az analízis, ill. algebra tárgyak keretén belül ismerik meg. 1996-ban az elsőéves hallgatóknak egy jobb képességű csoportjával ismét megírattam a felmérőt (az első elemi matematika gyakorlaton).

Tanulságok

Mielőtt a felméréseket elemezném, szeretném részletesebben megindokolni, hogy az eredetileg csak a saját munkámat elősegítő elemzést miért tartom szükségesnek közzétenni.

A matematika szakra jelentkező diákok képessége, felkészültsége évek óta egyre gyengébb, s ez nem csak főiskolánkon van így.[4] Későbbi visszajelzések alapján tudjuk, hogy sok közepes képességű, de szorgalmas hallgatónkból jó, lelkiismeretes tanár lett, tehát megfelelő alapokkal és kellő szorgalommal a matematika szak elvégezhető. Az utóbbi pár évben azonban egy egyre erősődő negatív tendencia figyelhető meg a hallgatóink körében. Az első pár hét, hónap után, mivel van rá lehetőség, leadják a matematika szakot, nem gondolva a következményekkel, hogy egy szakos fizika, kémia, földrajz (!) stb. szakos tanárként hogyan tudnak majd elhelyezkedni.

A szakleadás egyik oka a középiskolai és a főiskolai matematika tanulás, tanulási módszer közti különbség. Egy hallgató konkrétan meg is fogalmazta a lényeget. Elmondta nekem, hogy ő azért választotta ezt a szakot, mert szerette a matematikát, és ezt nem kellett tanulni a középiskolában. Itt a főiskolán viszont sokat kell tanulni, ő nem erre számított!

A többségnek valóban gondot okoz a definíciók, tételek, bizonyítások, „értelmes" elsajátítása. Vannak akik bemagolják az anyagot (még az ábrázoló geometriai szerkesztéseket is !), de ha belekérdez a tanár az egyes lépések miértjébe, „elvesznek". Nem tudnak matematikát tanulni; nem tudják megragadni a definíciók lényegét, nem látják a különbséget tétel és definíció között, stb.

Még rosszabb a helyzet a nem matematika szakosok matematika oktatásánál. A gazdaságismeret, a számítástechnika stb. szakosok matematika tanításával kapcsolatos problémákra itt nincs mód bővebben kitérni, de a nehézségeket jelezheti az a tény, hogy a számítástechnika szakra jelentkezők többsége nem is tudja, hogy neki a felvétel után egy évig matematikát is kell tanulnia. (Nem egy történelem—számítástechnika szakos „dicsekedett" már nekem azzal, hogy kettesre érettségizett matematikából). Külön cikk témája lehetne az itt alkalmazható módszerek tárgyalása, ugyanis elgondolkodtatóak a Vízvári Béla [4] által leírtak, azaz hogy ha egy ilyen szaknak a felét kibuktatja egy matematikus előadó, akkor eltűnik egy másik szak adott évfolyamra eső költségvetési támogatásának a fele.

Visszatérve a logikai alapokhoz, az általános iskolai oktatásnál kell kezdenünk. A logika elemeinek tanítása évek óta szerepel a tantervben, de eléggé elsikkad a tanítás során.

Több tanítványom is írt szakdolgozatot arról, hogy a logika elemei hogyan találhatók meg, dolgozhatók föl az általános iskolai anyagban. Néhányan írattak felmérőket is, (főleg nyolcadik osztályban) és sajnos az ott tapasztalt negatívumok jó része jelentkezik a főiskolai hallgatóknál is. Gondot jelentett például néhány esetben állítások tagadásának megfogalmazása; ez még a hallgatóinknál is így van, hiszen sokuk szerint a „Mindenki tud úszni" állítás tagadása a „Senki sem tud úszni". (Hogyan épülhet erre az indirekt bizonyítás?). Problémás volt még a „ha . . . akkor" típusú állítások és megfordításuk vizsgálata. Sokan azonosnak tekintik a kettőt, az implikáció (kondicionális) és az ekvivalencia (bikondicionális) közötti különbséget jobban kellene hangsúlyozni. (A nem matematika szakosoknál gyakori, hogy az említett tipusú állításokban az „akkor"-t időhatározóként fogják fel s kezdenek úgy definíciót, hogy pl. „Egy sorozat konvergens ,akkor amikor . . . "). A felmérésekből is kiderült, hogy szükség lenne a bizonyítási igény felkeltésére a nyolcadik osztályban; sok tanuló csak „megérzés alapján" próbálta megoldani a feladatokat, nehezen tudta leírni, indokolni a gondolatmenetét. Játékos, egyszerűbb feladatokkal ez is gyakorolható.[1]

A középiskola elvégzése után a diákoknak a definíciók, tételek, a különböző bizonyítási módszerek lényegével tisztában kellene lenniük, az első éves hallgatók körében végzett, a bevezetőben említett vizsgálatok azonban azt mutatták, hogy nem mindenkinél világosak ezek a fogalmak.

Az első órán (45 perc alatt) megíratott felmérő tíz feladatból állt, melyeket úgy válogattam, hogy meglehetősen átfogó képet kapjak a diákok logikai ismereteiről. A részletesebb elemzés az 1992-ben íratott anyagra vonatkozik.

1. Egy egyenes merőleges egy síkra, ha a sík minden egyenesére merőleges. Fejezze be a következő mondatot úgy, hogy az előző tagadása legyen!

Egy egyenes nem merőleges a síkra, ha ...

A megoldások több mint fele rossz volt. A kiegészítések többségében a „... ha a sík egyik egyenesére sem merőleges” megfogalmazást írták.

2. Az alábbi állítások közül melyek igazak? Melyek egymás megfordításai?

(a) Az egybevágó háromszögek egyenlő területűek.

(b) Ha a háromszögek nem egyenlő területűek, akkor nem egybevágóak.

(c) Ha a háromszögek egyenlő területűek,akkor egybevágóak.

A logikai értékét 80%-uk jól határozta meg, ami a kérdések egyszerű geometriai hátterét tekintve nem jó arány. A második kérdésre a hallgatók több mint fele (!) azt válaszolta, hogy az (a) kijelentés megfordítás a (b). (A (b) állítás az (a) kontrapozíciója, így nyilvánvaló, hogy az implikáció, annak megfordítása és a kontrapozíció kapcsolatát a továbbiakban tisztázni kellett.)

3. Nem igaz, hogy minden páratlan egész szám prímszám.

Fejezze be a következő mondatot úgy, hogy az előző állítással azonos jelentésű legyen! Vannak egész számok ...

Ez volt a legnagyobb arányban (92%) jól megoldott feladat. A kvantort tartalmazó állítások tagadásának ismeretéről túl szép eredményt mutat, valószínű, hogy a túlságosan is könnyű matematikai alap miatt.

4. Az alábbi két állítás ugyanazt fejezi-e ki ?

Nem igaz, hogy Kati szőke és kékszemű.

Kati nem szőke vagy Kati nem kékszemű.

Mindössze másfél százalék volt a jó válasz. A hibásak többségét indokolták is, pl.így: „Nem igaz, mert a másodikban lehet választani, míg az első kijelenti, hogy nem igaz.” „ Úgy lenne jó, hogy Kati sem nem szőke, sem nem kékszemű.” „ Nem ugyanaz, mert az és és a vagy szónak más az értelme.” Csak néhány példát ragadtam ki a rossz válaszok közül, de ezekből is látható, hogy a konjunkció tagadása mennyire nem világos. (Itt a $\rceil(A \ \wedge \ B) \sim\rceil A \vee \rceil B$ de Morgan törvényt kellett volna alkalmazni, ami nem középiskolai anyag, de hasonló jellegű átlagfogalmazások előfordulhattak.)

5. Milyen következtetést lehet levonni az alábbi két állításból? (Kaphat vagy nem kaphat Kati engedélyt az Olimpián való részvételre?)

(1.) Ha Kati jó eredményeket ér el a sportban, kaphat engedélyt az Olimpián való részvételre.

(2.) Kati nem ér el jó eredményeket a sportban.

Ez eléggé nehéz feladat volt, mert a két állítás alapján kaphat (nincs az a feltétel, hogy „... de csak akkor”), de megfogalmazódik, hogy akkor mit keresne az Olimpián? A megoldások nyolcvan százaléka hibás volt, ezek közül néhány: „Ha nem ér el jó eredményt, semmiképp sem kaphat.” Születtek nem egyértelmű válaszok is: „Valószínű, hogy nem kap.” „Vagy kap, vagy nem.” „Mindkettő lehetséges, attól függ, hogy szükség van-e rá.” „Kaphat engedélyt, de nem kap.”

6. Következik-e a negyedik állítás az előző háromból?

(a)

(1.) Ha a 2 prímszám, akkor ez a legkisebb pozitív prím?

(2.) Ha a 2 a legkisebb pozitív prímszám, akkor az 1 nem prímszám.

(3.) Az 1 nem prímszám.

(4.) A 2 prímszám.

Ez is elég „fogós” feladat volt, s bár a hallgatók 52%-a jó választ adott, azaz, hogy nem következik, de nem vagyok benne biztos, hogy ez mindenkinél tudatos, helyesen megindokolt válasz lett volna. Többen azt írták, hogy igen, a 2 prímszám; nem azt vizsgálták, hogy következik-e az utolsó állítás az előzőekből, hanem azt, hogy igaz vagy sem.

(b) Következik-e az első két állításból a harmadik ?

(1.) Ha holnap hideg lesz, a kabátomat fel fogom venni, ha az ujját megjavítom.

(2.) Holnap hideg lesz, de a kabát ujját nem javítom meg.

(3.) Holnap a kabátot nem fogom felvenni.

A megoldások 80%-a rossz volt, és még a „nem következik” helyes állítást is többen rosszul indokolták. Pl. „Nem következik, mert ha hideg van a szakadt kabátot is föl lehet venni”. Az alábbi válaszadó „belegondolta” azt, amitől valóban helyes lenne a következtetés: „Igaz, mert **csak akkor** fogja fölvenni, ha megvarrta az ujját.”

Az 5-ös és 6-os feladatokra adott válaszok elgondolkodtathatnak arról, hogy egy bonyolultabb bizonyítás megértése, visszaadása milyen nehézséget jelent azoknak, akik az akkor és csak akkor fogalmakkal ennyire nincsenek tisztában. Hangsúlyozni kell, hogy csak azt használhatja föl a bizonyítás során, amit korábban már igaznak elfogadott, vagy bizonyított, „belegondolni” dolgokat nem lehet! (A következtetések vizsgálatánál, a formalizálásnál ezekre a feladatokra visszatértünk.)

7. Jók-e az alábbi definíciók?

(a) A deltoid olyan négyszög, melynek két átlója merőleges egymásra, és a nagyobb átló a négyszög szimetriatengelye.

(b) A váltószögek olyan szögpárok, melyek szárai páronként párhuzamosak.

Az (a) kérdésre 73%-ban rossz választ kaptam, amelynek oka főleg a geometriai ismeretek hiányossága. Volt olyan megoldás, hogy „... igaz, ha a deltoid konvex, nem igaz, ha a deltoid konkáv.”

A második részre adott válaszoknak is a 66%-a rossz volt, szerepelt közöttük pl. olyan, hogy „igaz, csak hiányos”.

8. Mi az indirekt bizonyítás lényege?

A válaszok 67%-a jó volt, de feltűnt, hogy nagyon sokan nem általánosságban fogalmazták meg a bizonyítás jellemzőit, hanem írtak egy konkrét példát rá. (A többség bizonyította, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális.) Ez a gondolatmenet a nem matematika szakosoknál is gyakran előfordul, egy tételt konkrét példán keresztül „igazolnak”.

A rosszak között több a teljesen zavaros: pl.„Felteszük az állítás helyességét, és azt bizonyítjuk be, hogy nem igaz.” „Az ellenkezőjét bizonyítom be”. Néhányan összekeverték a teljes indukcióval.

9. Az alábbi mondatok közül melyik az egyenlőszárú háromszög definíciója?

(a) Egy háromszög egyenlő szárú ha van két egyenlő oldala.

(b) Az egyenlő szárú háromszög alapján levő szögek egyenlőek.

(c) Az egyenlő szárú háromszögnek van szimetriatengelye.

Ez volt a legmegdöbbentően rossz eredményt hozó feladat, mindössze 28% volt a jó válasz. A legtöbben, (40%) a (b)-t tekintették definíciónak , voltak akik a (b)-t és (c)-t, sőt 13% mindhármat megjelölte definícióként. Néhányan „tanulságos” megjegyzéseket is fűztek a megoldásukhoz: „Egyik sem, mert egyik sem egzakt ”; „Mindegyik igaz, de a speciális esetet egyik sem zárja ki”; „Mindegyik igaz, de egyik sem zárja ki az egyenlő oldalú háromszöget.”

10. Fogalmazza meg az alábbi tételt másképpen!

Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek az összege 180°.

Mindössze ketten fogalmazták meg a „szükséges és elégséges” kifejezést használva; 35%-uk jól, két részre bontva „ha akkorral”; 47%-uknál viszont csak az egyik implikáció szerepelt, a megfordítás már nem! A rossz válaszok közül néhány: „Nem lehet ilyen röviden és egyértelműen átfogalmazni”; „Egy négyszög húrnégyszög, ha meg tudom szerkeszteni a köré írható kör középpontját ”; „Egy négyszöget akkor nevezünk húrnégyszögnek, ha a szemközti szögeinek összege 180°; „Ha egy négyszög sarkai egy köríven helyezkednek el, akkor az húrnégyszög.”

A négy évvel későbbi, kisebb létszámú csoportban készült felmérés jobb eredményt mutatott, de a legjellemzőbb hibák ott is előfordultak. A negyedik feladatot csak a csoport negyede oldotta meg jól, a hatost és a kilencest is csak a fele.

A vizsgálatokban nem olyan nagy számú hallgatóság vett részt, hogy komoly következtetéseket lehetne levonni, (nem is ez volt a cél), mindenesetre az elemzések rámutattak néhány problémára. Az egyes kérdések utáni megjegyzésekből is látható, hogy komoly gond van a definíciók pontos megfogalmazásával, lényegének megértésével, a tételek pontos megfogalmazásával (még később is előfordul, hogy tételben szerepel a „nevezzük” kifejezés!) a „szükséges és elégséges feltétel”, az ekvivalencia ismeretével.

Mi a megoldás? A felsőoktatás módszertana eddig eléggé elhanyagolt terület volt, arra építve, hogy a legértelmesebb diákok kerülnek be az egyetemekre és főiskolákra, és ők „maguk is meg tudják tanulni” a leadott anyagot. Mára viszont megváltozott a helyzet, s valamit tennünk kell, hogy megelőzzük a szakleadást, lemorzsolódást.

Visszatérve a logikai fogalmakra, nagy segítség lenne, ha már általános, és főleg középiskolában is nagyobb figyelmet fordítanának ezek tisztázására. A főiskolán pedig „fel kell zárkóztatni” a gyengébb hallgatókat. (Szegeden „Matematikai praktikum” című tárgy keretében az első félévben ezt csinálják.) Nálunk az elemi matematika óráin lehetne ezt megvalósítani, a matematikai gondolkodást fejleszteni.

Szándékomban áll ez év szeptemberében a nem matematika szakos, számítástechnikus hallgatók első matematika előadásán egy, a fentiekben elemzett felméréshez hasonlót íratni. (Mindenesetre, ennek az eredményétől függetlenül, a szemesztert az előzőekben említett, problémás fogalmak tisztázásával kezdem.)

Irodalom

[1] Gyarmatiné Kocsis, M.: A bizonyítási igény felkeltése az általános iskolában. *A Matematika Tanítása*, 1986/2.

[2] Rédling E.: Felmérések a logikai fogalmak témaköréből. *A Matematika Tanítása*, 1988/6.

[3] Szendrei J.: Matematikai feladatgyűjtemény I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

[4] Vízvári, B.: Új didaktikai és erkölcsi dilemmák a matematika egyetemi oktatásában. *A Matematika Tanítása*, 1998/5.

Sashalminé Kelemen Éva
Institute of Mathematics and Informatics
Károly Eszterházy Teachers’ Training College
Leányka str. 4-6.
H-3300 Eger, Hungary